

Prénom

Nom

Série générale

*Calculatrices autorisées***Exercice 1 /6**

On considère la fonction f définie sur $] -1,5 ; +\infty[$ par

$$f(x) = \ln(2x+3) - 1.$$

Le but de cet exercice est d'étudier la convergence de la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 0 \text{ et } u_{n+1} = f(u_n) \text{ pour tout entier naturel } n.$$

Partie A : Étude d'une fonction auxiliaire

On considère la fonction g définie sur $] -1,5 ; +\infty[$ par $g(x) = f(x) - x$.

- Déterminer la limite de la fonction g en $-1,5$.
On admet que la limite de la fonction g en $+\infty$ est $-\infty$.
- Étudier les variations de la fonction g sur $] -1,5 ; +\infty[$.
- (a) Démontrer que, dans l'intervalle $] -0,5 ; +\infty[$, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α .
(b) Déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-2} .

Partie B : Étude de la suite (u_n)

On admet que la fonction f est strictement croissante sur $] -1,5 ; +\infty[$.

- Soit x un nombre réel. Montrer que si $x \in [-1 ; \alpha]$ alors $f(x) \in [-1 ; \alpha]$.
- (a) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n :

$$-1 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \alpha.$$

- (b) En déduire que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite.

Exercice 2 /2

Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation différentielle

$$(E): y' + 3y = -e^{2x}$$

Exercice 3 /2

On considère la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}$ c'est-à-dire

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

- Montrer que $2(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) \leq \frac{1}{\sqrt{k}}$ pour tout entier k non nul.
- En déduire que $2\sqrt{n+1} - 2 \leq u_n$.
- En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.