Le 13/03/2025 IE n° 6 — Nombres complexes CPES — SG

Calculatrices autorisées - Durée : 1h30 (2H pour les tiers-temps).

▶ Exercice 1 /2

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $3z+1-2\mathrm{i}=4-3\mathrm{i}-2\mathrm{i}z$
2. $3\overline{z}+2\mathrm{i}=\mathrm{i}z$

▶ Exercice 2 /3

On considère le polynôme P défini sur $\mathbb{C}$ par $P(z)=z^3-(2+\mathrm{i}\sqrt{2})z^2+2(1+\mathrm{i}\sqrt{2})z-2\mathrm{i}\sqrt{2}$.

1. Montrer que le nombre $z_0=\mathrm{i}\sqrt{2}$ est une racine de P.
2. Factoriser le polynôme P
3. En déduire les solutions de l'équation $P(z)=0$ dans $\mathbb{C}$.

▶ Exercice 3 /3

1. Trouver sous la forme $a+\mathrm{i}b$ (a et b réels) un nombre complexe ω tel que $\omega^2=48+14\mathrm{i}$
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2-5(1+\mathrm{i})z-12+9\mathrm{i}=0$
3. Vérifier que le quotient des racines est un imaginaire pur.

▶ Exercice 4 /4

On considère la fonction f de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ qui à tout nombre complexe différent de -1, associe $f(z)=\dfrac{\mathrm{i}z}{z+1}$

1. Soit $z_1=-\dfrac{1}{2}+\mathrm{i}$. Donner l'expression algébrique de $f(z_1)$.
2. Déterminer les solutions de l'équation $f(z)=z$.
3. On pose $z=x+\mathrm{i}y$, avec x et y réels tels que $(x,y)\neq(-1,0)$.
   (a) Déterminer l'ensemble $\mathscr{E}$ des couples $(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ tels que $f(z)\in\mathbb{R}$.
   (b) Déterminer l'ensemble $\mathscr{F}$ des couples $(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ tels que $f(z)\in\mathrm{i}\mathbb{R}$.
   (c) Interpréter ces ensembles en terme géométrique.

▶ Exercice 5 /2

On considère le nombre complexe $z=\dfrac{3-3\mathrm{i}}{\sqrt{3}+\mathrm{i}}$.

1. Déterminer la forme exponentielle de z
2. En déduire l'écriture algébrique de z^{10}.

▶ Exercice 6 /2

Linéariser l'expression $\cos^2(x)\sin(x)$ pour x réel.

▶ Exercice 7 **Problème /6**

Soient A et B les points d'affixes respectives -1 et 1. À chaque point M du plan complexe d'affixe $z \in \mathbb{C}^*$, on associe le point M' d'affixe z' tel que

$$z' = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right).$$

1. Déterminer l'ensemble des points M d'affixe $z \in \mathbb{C}^*$ tels que $z' = z$.
2. Soit M un point d'affixe $z \in \mathbb{C}^*$, distinct de A et de B. Justifier l'égalité
$$\frac{z'+1}{z'-1} = \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^2$$
3. En déduire $\dfrac{M'A}{M'B}$ en fonction de $\dfrac{MA}{MB}$ et l'angle $\left(\overrightarrow{M'A}; \overrightarrow{M'B}\right)$ en fonction de l'angle $\left(\overrightarrow{MA}; \overrightarrow{MB}\right)$.
4. Montrer que si le point M, distinct de l'origine O du repère, appartient à l'axe des ordonnées alors il en est de même pour M'.
   Que peut-on dire du point M' lorsque M est proche de O sur la droite des ordonnées ?
5. soit Γ le cercle de diamètre $[AB]$. Démontrer que
$$M \in \Gamma \iff M' \in [AB]$$
   *Distinguer les cas M **est distinct de** A **et** B ou pas.*

▶ Exercice 8 /3

On pose $z = \cos\frac{\pi}{8} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{8}$.

1. Justifier que l'écriture algébrique de z^2 est $\frac{\sqrt{2}}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}$.
2. Par une technique de recherche de racine carrée, déterminer les valeurs exactes de $\cos\frac{\pi}{8}$ et $\sin\frac{\pi}{8}$.