Prénom : | Nom : | Techno/Pro

Calculatrices autorisées

▶ Exercice 1 /6

Calculer les sommes suivantes :

1°) $\sum_{k=1}^{50} k$ **2°)** $\sum_{k=1}^{10} 2^k$ **3°)** $\sum_{k=1}^{100} 5k+2$ **4°)** $\sum_{k=0}^{10} \left(\frac{3}{4}\right)^k$

▶ Exercice 2 /9

La population d'une espèce en voie de disparition est surveillée de près dans une réserve naturelle.

Les conditions climatiques ainsi que le braconnage font que cette population diminue de 10 % chaque année.

Afin de compenser ces pertes, on réintroduit dans la réserve 100 individus à la fin de chaque année.

On souhaite étudier l'évolution de l'effectif de cette population au cours du temps. Pour cela, on modélise l'effectif de la population de l'espèce par la suite (u_n) où u_n représente l'effectif de la population au début de l'année $2020+n$.

On admet que pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant 0$.

Au début de l'année 2020, la population étudiée compte 2 000 individus, ainsi $u_0 = 2000$.

1. Justifier que la suite (u_n) vérifie la relation de récurrence :
$$u_{n+1} = 0,9u_n + 100.$$
2. Calculer u_1 puis u_2.
3. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - 1000$.
   (a) Montrer que la suite (v_n) est géométrique de raison 0,9.
   (b) En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n = 1000\left(1+0,9^n\right)$.
4. On souhaite déterminer le nombre d'années nécessaires pour que l'effectif de la population passe en dessous d'un certain seuil S (avec $S > 1000$).

   Déterminer, en utilisant la calculatrice, le plus petit entier n tel que $u_n \leqslant 1020$.

   Justifier la réponse.

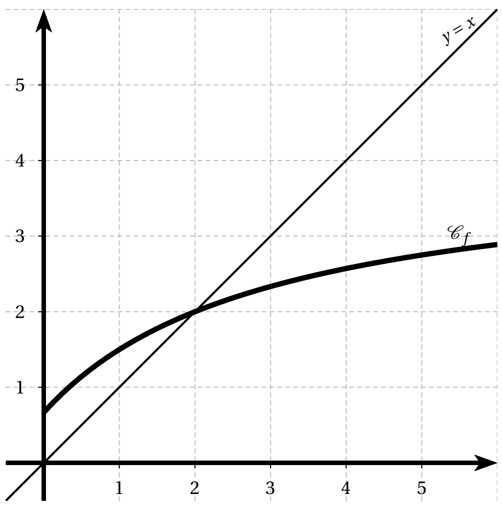
▶ Exercice 3 /6

On définit pour tout $n \in \mathbb{N}$ la suite (u_n) par $u_0 = 5$ et $u_{n+1} = \dfrac{4u_n+2}{u_n+3}$.

On appelle f la fonction définie sur $]2; +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{4x+2}{x+3}$

1°) Calculer u_1, donner le résultat sous la forme d'une fraction simplifiée.

2°) Sur le graphique ci-dessous, on a tracé la courbe de f et la droite d'équation $y = x$.
Construire u_0, u_1, et u_2 sur l'axe des abscisses :



3°) On définit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \dfrac{u_n-2}{u_n+1}$

(a) Démontrer que (v_n) est géométrique de raison $\dfrac{2}{5}$.

(b) En déduire une expression de v_n en fonction de n

(c) Exprimer u_n en fonction de v_n.

(d) En déduire l'expression de u_n en fonction de n.