**Prénom :** **Nom :** **Générale**

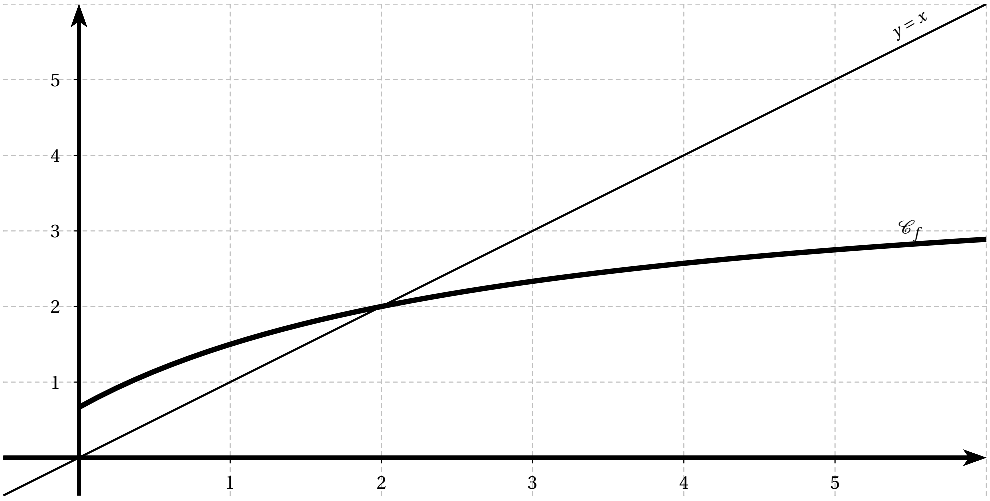
## ▶ Exercice 1 /6

On définit pour tout $n \in \mathbb{N}$ la suite $(u_n)$ par $u_0 = 5$ et $u_{n+1} = \dfrac{4u_n + 2}{u_n + 3}$.

On appelle $f$ la fonction définie sur $]2;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{4x+2}{x+3}$

**1°)** Calculer $u_1$, donner le résultat sous la forme d'une fraction simplifiée.

**2°)** Sur le graphique ci-dessous, on a tracé la courbe de $f$ et la droite d'équation $y = x$.
Construire $u_0$, $u_1$, et $u_2$ sur l'axe des abscisses :




**3°)** On définit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \dfrac{u_n - 2}{u_n + 1}$

(a) Démontrer que $(v_n)$ est géométrique de raison $\dfrac{2}{5}$.

(b) En déduire une expression de $v_n$ en fonction de $n$

(c) Exprimer $u_n$ en fonction de $v_n$.

(d) En déduire l'expression de $u_n$ en fonction de $n$.

## ▶ Exercice 2 /10

Soit la suite $(u_n)$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 4u_n$

**1°)** Calculer $u_2$ et montrer que $u_3 = 21$.

**2°)** **Première approche :**

(a) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_{n+1} - u_n$. Démontrer que $(v_n)$ est géométrique. Donner son expression en fonction de $n$

(b) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = u_{n+1} - 4u_n$. Démontrer que $(w_n)$ est géométrique. Donner son expression en fonction de $n$

(c) Exprimer $u_n$ en fonction de $v_n$ et $w_n$ et en déduire une expression de $u_n$ en fonction de $n$.

**3°)** **Seconde approche :**

(a) (**) Vérifier que $(u_n)$ vérifie $u_{n+1} = 4u_n + 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(b) Démontrer que la suite $(v_n)$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = u_n + \dfrac{1}{3}$ est géométrique

(c) En déduire l'expression de $u_n$ en fonction de $n$.

## ▶ Exercice 3 /4

Simplifier les sommes suivantes :

**1°)** $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 5k + 2 + \left(\frac{3}{4}\right)^k$

**2°)** $\displaystyle\sum_{k=n}^{2n} k$