Feuille d'exercices 16
ÉLÉMENTS DE CORRECTION

Exercice 1.

(f) On a : $\varphi(2\exp) = 8\exp \neq 2\varphi(\exp) = 4\exp$, donc φ n'est pas linéaire.

(g) Soient $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, on a :

$$f(\lambda u + \mu v) = (\lambda u_0 + \mu v_0, \lambda u_1 + \mu v_1, \lambda u_2 + \mu v_2) = \lambda(u_0, u_1, u_2) + \mu(v_0, v_1, v_2) = \lambda f(u) + \mu f(v),$$

donc f est linéaire.

(h) Soient $u = (x, y, z), v = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, on a :

$$f(\lambda u+\mu v) = (\lambda x+\mu a+2(\lambda y+\mu b)+3(\lambda z+\mu c), 2(\lambda y+\mu b)-(\lambda z+\mu c), \lambda x+\mu a+\lambda z+\mu c) = \lambda f(u)+\mu f(v),$$

donc f est linéaire.

(i) Soient $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, on a :

$$f(\lambda A + \mu B) = (\lambda a + \mu x) + (\lambda d + \mu t) = \lambda(a + d) + \mu(x + t) = \lambda f(A) + \mu f(D),$$

donc f est linéaire.

(j) On a : $f(2) = 8 \neq 2f(1) = 6$, donc f n'est pas linéaire.

Exercice 4. Soit $u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$f \circ f \circ f(u) = f \circ f(y, -x - y) = f(-x - y, -y + x + y) = f(-x - y, x) = (x, x + y - x) = u,$$

donc $f \circ f \circ f = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}$. Donc f est bijective, de réciproque $f^{-1} = f \circ f$.

Exercice 5.

(f) Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$, on a :

$$f(M) = 0_n \Leftrightarrow M = -M^\intercal \Leftrightarrow M \in A_n(\mathbb{R}),$$

donc $\mathrm{Ker}\ f = A_n(\mathbb{R})$.
De plus : $\mathrm{Im}\ f = \mathrm{Vect}(f(E_{ij},\ 1 \leq i, j \leq n) = \mathrm{Vect}(E_{ij} + E_{ji},\ 1 \leq i, j \leq n) = S_n(\mathbb{R})$.

(g) Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, on a :

$$f(u) = 0_{\mathbb{R}^4} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x + z & = & 0 \\ y - x & = & 0 \\ z + y & = & 0 \\ x + y + 2z & = & 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x + z & = & 0 \\ y + z & = & 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow u = (-z, -z, z) = z(-1, -1, 1),$$

donc $\mathrm{Ker}\ f = \mathrm{Vect}((-1, -1, 1))$.
De plus :

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Im}\ f & = & \mathrm{Vect}(f(e_1), f(e_2), f(e_3)) \\ & = & \mathrm{Vect}\left(1, -1, 0, 1), (0, 1, 1, 1), (1, 0, 1, 2)\right) \\ & = & \mathrm{Vect}\left(1, -1, 0, 1), (0, 1, 1, 1)\right). \end{array}$$

(h) Soit $z = x + iy \in \mathbb{C}$, on a :

$$f(z) = 0 \Leftrightarrow (x + iy) + i(x - iy) = 0 \Leftrightarrow x + y = 0 \Leftrightarrow z = x - ix = x(1 - i),$$

donc $\mathrm{Ker}\, f = \mathrm{Vect}(1 - i)$.
De plus : $\mathrm{Im}\, f = \mathrm{Vect}(f(1), f(i)) = \mathrm{Vect}(1 + i)$.

(i) Soit $P \in \mathbb{R}_3[X]$n on a :

$$f(P) = 0_{\mathbb{R}[X]} \Leftrightarrow P = (X + 1)P' \Leftrightarrow P = \lambda X + \lambda = \lambda(X + 1),$$

donc $\mathrm{Ker}\, f = \mathrm{Vect}(X + 1)$.
De plus : $\mathrm{Im}\, f = \mathrm{Vect}(f(X^k),\ k \in [\![0, 3]\!]) = \mathrm{Vect}(1, -X^2 - 2X, -2X^3 - 3X^2)$.

(j) Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, on a :

$$f(u) = 0_{\mathbb{R}^3} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x + y & = & 0 \\ x + 2ay & = & 0 \\ z & = & 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x + y & = & 0 \\ (2a - 1)y & = & 0 \\ z & = & 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow u = 0_{\mathbb{R}^3} \text{ si } a \neq \frac{1}{2},\ u = (-y, y, 0) \text{ si } a = \frac{1}{2},$$

donc $\mathrm{Ker}\, f = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$ si $a \neq \frac{1}{2}$, $\mathrm{Vect}((-1, 1, 0))$ si $a = \frac{1}{2}$.
De plus :

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Im}\, f & = & \mathrm{Vect}(f(e_1), f(e_2), f(e_3)) \\ & = & \mathrm{Vect}\,(1, 1, 0), (1, 2a, 0), (0, 0, 1)) \\ & = & \mathbb{R}^3 \text{ si } a \neq \frac{1}{2},\ \mathrm{Vect}\,(1, 1, 0), (0, 0, 1))\ \text{ si } a = \frac{1}{2}. \end{array}$$

Exercice 10.

(a) On a directement :

$$g \circ f = 0_{\mathcal{L}(E,G)} \Leftrightarrow \forall u \in E,\ g(f(u)) = 0_G \Leftrightarrow \forall u \in E,\ f(u) \in \mathrm{Ker}\, g \Leftrightarrow \mathrm{Im}\, f \subset \mathrm{Ker}\, g.$$

(b) Soit $u \in \mathrm{Ker}\, f$. Alors $f(u) = 0_F$ donc $g(f(u)) = 0_G$, donc $u \in \mathrm{Ker}\, g \circ f$. Donc $\mathrm{Ker}\, f \subset \mathrm{Ker}\, g \circ f$.
Soit $v \in \mathrm{Im}\, g \circ f$. Soit $u \in E$ tel que $v = g \circ f(u)$, alors $v = g(f(u))$ donc $v \in \mathrm{Im}\, g$. Donc $\mathrm{Im}\, g \circ f \subset \mathrm{Im}\, g$.

(c) Supposons que $g \circ f$ soit un isomorphisme. Alors $\mathrm{Ker}\, g \circ f = \{0_E\}$ et $\mathrm{Im}\, g \circ f = G$, donc, d'après la question précédente, $\mathrm{Ker}\, f = \{0_E\}$ et $\mathrm{Im}\, g = G$. Donc f est injective et g est surjective.

Exercice 11. D'après l'exercice précédent, on a toujours $\mathrm{Ker}\, f \subset \mathrm{Ker}\, f^2$ et $\mathrm{Im}\, f^2 \subset \mathrm{Im}\, f$.

Supposons que $\mathrm{Ker}\, f \cap \mathrm{Im}\, f = \{0_E\}$. Soit $u \in \mathrm{Ker}\, f^2$. Alors $f(f(u)) = 0_E$, donc $f(u) \in \mathrm{Ker}\, f \cap \mathrm{Im}\, f$, donc $f(u) = 0_E$, donc $u \in \mathrm{Ker}\, f$. Donc $\mathrm{Ker}\, f^2 \subset \mathrm{Ker}\, f$, donc $\mathrm{Ker}\, f = \mathrm{Ker}\, f^2$.
Réciproquement, supposons que $\mathrm{Ker}\, f = \mathrm{Ker}\, f^2$. Soit $u \in \mathrm{Ker}\, f \cap \mathrm{Im}\, f$, alors $f(u) = 0_E$ et il existe $v \in E$ tel que $u = f(v)$, donc $f(f(v)) = 0_E$, donc $v \in \mathrm{Ker}\, f^2$. Donc $v \in \mathrm{Ker}\, f$, donc $f(v) = 0_E$, donc $u = 0_E$. Donc $\mathrm{Ker}\, f \cap \mathrm{Im}\, f = \{0_E\}$.

Supposons que $\mathrm{Ker}\, f + \mathrm{Im}\, f = E$. Soit $u \in \mathrm{Im}\, f$. Soit $v \in E$ tel que $u = f(v)$. Soient $v_1 \in \mathrm{Ker}\, f$ et $v_2 \in \mathrm{Im}\, f$ tels que $v = v_1 + v_2$, puis $w \in E$ tel que $v_2 = f(w)$, alors : $u = f \circ f(w)$, donc $u \in \mathrm{Im}\, f^2$. Donc $\mathrm{Im}\, f \subset \mathrm{Im}\, f^2$, donc $\mathrm{Im}\, f = \mathrm{Im}\, f^2$.
Réciproquement, supposons que $\mathrm{Im}\, f = \mathrm{Im}\, f^2$. Soit $u \in E$. Alors $f(u) \in \mathrm{Im}\, f$, donc $f(u) \in \mathrm{Im}\, f^2$. Soit donc $v \in E$ tel que $f(u) = f \circ f(v)$, alors $f(u - f(v)) = 0_E$, donc $w = u - f(v) \in \mathrm{Ker}\, f$. Donc $u = w + f(v) \in \mathrm{Ker}\, f + \mathrm{Im}\, f$. Donc $\mathrm{Ker}\, f + \mathrm{Im}\, f = E$.

Exercice 12.

(c) Soit $u=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$. On cherche $v=\lambda(1,2,3)$ et $w=\alpha(1,0,0)+\beta(1,1,0)$ tels que $u=v+w$:

$$u=v+w\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{rcl} x&=&\lambda+\alpha+\beta\\ y&=&2\lambda+\beta\\ z&=&3\lambda\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{rcl}\alpha&=&x-y+\dfrac{z}{3}\\ \beta&=&y-\dfrac{2z}{3}\\ \lambda&=&\dfrac{z}{3}\end{array}\right.,$$

donc la décomposition de u selon F et G s'écrit : $u=\left(\dfrac{z}{3},\dfrac{2z}{3},z\right)+\left(x-\dfrac{z}{3},y-\dfrac{2z}{3},0\right)$.

On a donc directement : $s(u)=\left(\dfrac{z}{3},\dfrac{2z}{3},z\right)-\left(x-\dfrac{z}{3},y-\dfrac{2z}{3},0\right)=\left(-x+\dfrac{2z}{3},-y+\dfrac{4z}{3},z\right)$.

(d) Avec les notations et d'après les calculs ci-dessus : $p(u)=\left(x-\dfrac{z}{3},y-\dfrac{2}{3}z,0\right)$.

Exercice 14.

(a) Par équivalence :

$$(q\text{ est un projecteur})\Leftrightarrow q\circ q=q\Leftrightarrow(\mathrm{Id}_E-p)\circ(\mathrm{Id}_E-p)=\mathrm{Id}_E-p\Leftrightarrow p\circ p=p\Leftrightarrow(p\text{ est un projecteur}).$$

(b) On a :

$$u\in\operatorname{Im}p\Leftrightarrow p(u)=u\Leftrightarrow q(u)=0_E\Leftrightarrow u\in\operatorname{Ker}q,$$

donc $\operatorname{Ker}q=\operatorname{Im}p$, et de même :

$$u\in\operatorname{Ker}p\Leftrightarrow p(u)=0_E\Leftrightarrow q(u)=u\Leftrightarrow u\in\operatorname{Im}q,$$

donc $\operatorname{Im}q=\operatorname{Ker}p$.

Exercice 15. Soit $u\in E$. Notons $u=f_1+g_1$ la décomposition de u selon $\operatorname{Im}p$ et $\operatorname{Ker}p$, et $u=f_2+g_2$ la décomposition de u selon $\operatorname{Im}q$ et $\operatorname{Ker}q$.

Supposons $\operatorname{Ker}p=\operatorname{Ker}q$. Alors $f_1-f_2=g_2-g_1\in\operatorname{Ker}p$, donc :

$$p\circ q(u)=p(f_2)=p(f_1)=f_1=p(u),$$

donc $p\circ q=p$, et symétriquement $q\circ p=q$.
Réciproquement, supposons $p\circ q=p$ et $q\circ p=q$. Soit $u\in\operatorname{Ker}p$, alors : $q(u)=q\circ p(u)=q(0_E)=0_E$. Donc $\operatorname{Ker}p\subset\operatorname{Ker}q$, et symétriquement $\operatorname{Ker}q\subset\operatorname{Ker}p$, donc $\operatorname{Ker}p=\operatorname{Ker}q$.

Supposons $\operatorname{Im}p=\operatorname{Im}q$. Alors :

$$p\circ q(u)=p(f_2)=f_2=q(u),$$

donc $p\circ q=q$, et symétriquement $q\circ p=p$.
Réciproquement, supposons $p\circ q=q$ et $q\circ p=p$. Soit $u\in\operatorname{Im}p$, et soit $v\in E$ tel que $u=p(v)$, alors : $u=p(v)=q(p(u))\in\operatorname{Im}q$. Donc $\operatorname{Im}p\subset\operatorname{Im}q$, et symétriquement $\operatorname{Im}q\subset\operatorname{Im}p$, donc $\operatorname{Im}p=\operatorname{Im}q$.

Exercice 16. On a :

$$(p+q\text{ est un projecteur})\Leftrightarrow(p+q)^2=p+q\Leftrightarrow p\circ q+q\circ p=0.$$

Si $p\circ q=q\circ p=0$, les assertions ci-dessus sont vraies. Réciproquement, si $p\circ q+q\circ p=0$, alors en composant par p à gauche : $p\circ q+p\circ q\circ p=0$, et à droite : $p\circ q\circ p+q\circ p=0$, donc $p\circ q-q\circ p=0$. Donc $p\circ q=q\circ p=0$. On a bien l'équivalence voulue.

Dans ce cas, soit $w \in \operatorname{Im} p \cap \operatorname{Im} q$. Soient $u, v \in E$ tels que $w = p(u) = q(v)$, alors $w = p \circ p(u) = p \circ q(v) = 0_E$, donc $\operatorname{Im} p \cap \operatorname{Im} q = \{0_E\}$.
De plus, on a immédiatement $\operatorname{Im}(p+q) \subset \operatorname{Im} p + \operatorname{Im} q$. Réciproquement, soit $w \in \operatorname{Im} p + \operatorname{Im} q$, et soient $u, v \in E$ tels que $w = p(u) + q(v)$. Alors $q(v) = q(w - p(u)) = q(w)$, et de même $p(u) = p(w)$, donc $w = (p+q)(w) \in \operatorname{Im} p + q$, donc $\operatorname{Im} p + \operatorname{Im} q \subset \operatorname{Im} p + q$. Donc $\operatorname{Im}(p+q) \subset \operatorname{Im} p \oplus \operatorname{Im} q$.

Par ailleurs, on a immédiatement $\operatorname{Ker} p \cap \operatorname{Ker} q \subset \operatorname{Ker} p + q$. Réciproquement, soit $u \in \operatorname{Ker} p + q$. Alors $p(u) + q(u) = 0_E$, donc en composant par p : $p(u) = 0_E$, donc $u \in \operatorname{Ker} p$, et de même $u \in \operatorname{Ker} q$. Donc $u \in \operatorname{Ker} p \cap \operatorname{Ker} q$. Donc $\operatorname{Ker}(p+q) = \operatorname{Ker} p \cap \operatorname{Ker} q$.