Exercice 1

Partie A

On considère la suite (u_n) définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \int_0^1 (1-t)^n \mathrm{e}^t \,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que la fonction $f\ :\ t \longmapsto (2-t)\mathrm{e}^t$ est une primitive de $g\ :\ t \mapsto (1-t)\mathrm{e}^t$ sur $[0\ ;\ 1]$.
   En déduire la valeur de u_1.
2. Montrer à l'aide d'une intégration par parties que, pour tout n non nul,

$$u_{n+1} = (n+1)u_n - 1 \quad \text{(R)}$$

Partie B

Dans cette partie on se propose d'étudier la suite (u_n) à partir de la définition : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \int_0^1 (1-t)^n \mathrm{e}^t \,\mathrm{d}t$

1. Montrer que pour tout entier naturel n non nul, $u_n \geqslant 0$.
2. (a) Montrer que pour tout réel t de l'intervalle $[0\,;\ 1]$ et pour tout entier naturel non nul n

   $$(1-t)^n \mathrm{e}^t \leqslant \mathrm{e} \times (1-t)^n.$$

   (b) En déduire que pour tout n non nul, $u_n \leqslant \dfrac{\mathrm{e}}{n+1}$.
3. Déterminer la limite de la suite (u_n).

Partie C

Dans cette partie, on se propose d'exploiter la relation de récurrence (R) vérifiée par la suite (u_n).

$$u_{n+1} = (n+1)u_n - 1$$

Étant donné un réel a, on considère la suite (v_n) définie par :

$$v_1 = a \quad \text{et pour tout entier naturel non nul } n,\ v_{n+1} = (n+1)v_n - 1.$$

1. En utilisant le raisonnement par récurrence, montrer que pour tout entier naturel non nul n, $v_n = u_n + (n!)(a+2-\mathrm{e})$ où $n!$ désigne le produit des n premiers entiers naturels non nuls.
2. Étudier le comportement de la suite (v_n) à l'infini suivant les valeurs de a.
   (On rappelle que $\lim\limits_{n\to+\infty} n! = +\infty$.)

Exercice 2

On pose pour tous p, q entiers naturels, $I(p,q) = \int_0^1 x^p(1-x)^q \mathrm{d}x$

1. Lorsque $p > 0$, donner une relation entre $I(p,q)$ et $I(p-1,q+1)$.
2. En déduire $I(p,q)$.

Exercice 3

Soit $n \in \mathbb{N}$, $W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)\mathrm{d}x$

1. Montrer que la suite (W_n) est décroissante et convergente vers $L \geqslant 0$.
2. Si $n \geqslant 1$, trouver une relation entre W_{n+1} et W_{n-1}, en déduire la valeur de nW_nW_{n-1}, puis la valeur de L.
3. Si $p \in \mathbb{N}$, calculer W_{2p} et W_{2p+1}.

Exercice 4

Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère ϕ_n définie sur $\mathbb{R}$ par $\forall x \in \mathbb{R}$, $\phi_n(x) = (1-x)^n \mathrm{e}^{-2x}$ et on pose $I_n = \int_0^1 \phi_n(x)\mathrm{d}x$.

1. Calculer I_0 et I_1.
2. Étudier la monotonie de (I_n) puis montrer que (I_n) converge.
3. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$. Que peut-on en déduire ?
4. Démontrer que $2I_{n+1} = 1 - (n+1)I_n$.
5. En déduire les limites suivantes : $\lim\limits_{n\infty} nI_n$ et $\lim\limits_{n\infty} n(nI_n - 1)$