Devoir à la maison n° 12

Exercice 1.

1. On considère l'application :

$$f : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x-y+z, 2x+y+2z) \end{array} \right. .$$

   (a) Montrer que f est une application linéaire.

   (b) Déterminer le noyau et l'image de f. L'application f est-elle injective ? surjective ?

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère l'application linéaire :

$$f : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R}_n[X] \\ P & \mapsto & X^n P\left(\dfrac{1}{X}\right) \end{array} \right. .$$

   (a) Montrer que f est bien définie (c'est-à-dire que : $\forall P \in \mathbb{R}_n[X],\ f(P) \in \mathbb{R}_n[X]$).

   (b) Montrer que f est une symétrie.

   (c) Déterminer les sous-espaces caractéristiques de f lorsque $n = 4$.

Exercice 2. On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{xe^x - \sin(x) - x^2}{\ln(1+x) - x}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition D de f.
2. Montrer que $f(x) = -\dfrac{4}{3}x - \dfrac{11}{9}x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2)$.
3. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0. On appellera encore f ce prolongement.
4. Montrer que f est dérivable en 0, et déterminer $f'(0)$.
5. Déterminer l'équation de la tangente T en 0 au graphe Γ de f, et préciser les positions relatives de Γ et T.
6. Γ admet-il une droite asymptote en $+\infty$?