Feuille d'exercices 15
ÉLÉMENTS DE CORRECTION

Exercice 1.

(d) Non : $f : x \mapsto -x$ et $g : x \mapsto 0$ si $x < 0$, $2x$ si $x \geq 0$ sont dans E_4, mais $f + g : x \mapsto |x|$ n'est pas dans E_4.

(e) Non : $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ sont dans E_5, mais $A + B = I_2$ n'est pas dans E_5.

(f) Non : $(1, 0) \in E_6$, mais $\sqrt{2}(1, 0) \notin E_6$.

(g) Non : $u = (1, 2)$ et $v = (2, 4)$ sont dans E_7, mais $u + v = (3, 6) \notin E_7$.

(h) Oui : $0_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}}$ est bornée ; soient u, v bornées et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, alors $\lambda u + \mu v$ est bornée

(i) Oui : $0_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}}$ est convergente ; soient u, v convergentes et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, alors $\lambda u + \mu v$ est convergente

(j) Non : $(0, 0, 1)$ et $(1, 1, 0)$ sont dans E_{10}, mais $u + v = (1, 1, 1) \notin E_{10}$.

Exercice 2.

(a) Soient $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda_1 u + \lambda_2 v = 0_{\mathbb{R}^2}$, alors $\left\{ \begin{array}{rcl} 2\lambda_1 + \lambda_2 & = & 0 \\ 3\lambda_1 - 5\lambda_2 & = & 0 \end{array} \right.$ donc $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Donc u et v ne sont pas colinéaires.

(b) On a directement : $u = 2e_1 + 3e_2$ et $v = e_1 - 5e_2$.

(c) D'après les relations précédentes : $5u + 3v = 13e_1$, donc $e_1 = \dfrac{1}{13}(5u + 3v)$; et $u - 2v = 13e_2$, donc $e_2 = \dfrac{1}{13}(u - 2v)$.

(d) On a : $u = 2e_1 + 3e_2$, $v = e_1 - 5e_2$, $w = -e_1 + 4e_3$, donc : $5u + 3v = 13e_1$, donc $e_1 = \dfrac{1}{13}(5u + 3v)$; $u - 2v = 13e_2$, donc $e_2 = \dfrac{1}{13}(u - 2v)$; $e_3 = \dfrac{1}{4}(e_1 + w) = \dfrac{1}{52}(20u + 12v + 13w)$.

Exercice 4.

(g) Soit $u = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$:

$$u \in E_7 \Leftrightarrow x = 0 \Leftrightarrow u = (0, y, z, t) = ye_2 + ze_3 + te_4,$$

donc $E_7 = \text{Vect}(e_2, e_3, e_4)$.

(h) Soit $u = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$:

$$u \in E_8 \Leftrightarrow x = y = 2z = 4t \Leftrightarrow u = (4t, 4t, 2t, t) = t(4, 4, 2, 1),$$

donc $E_8 = \text{Vect}\left((4, 4, 2, 1)\right)$.

(i) Soit $P \in \mathbb{R}_3[X]$:

$$P \in E_9 \Leftrightarrow P(1) = P(2) = 0 \Leftrightarrow P = (X - 1)(X - 2)(aX + b),$$

donc $E_9 = \text{Vect}\left(X(X - 1)(X - 2), (X - 1)(X - 2)\right)$.

(j) Soit $P \in \mathbb{R}_3[X]$:

$$P \in E_{10} \Leftrightarrow P(1) = P'(1) = 0 \Leftrightarrow P = (X - 1)^2(aX + b),$$

donc $E_{10} = \text{Vect}\left(X(X - 1)^2, (X - 1)^2\right)$.

Exercice 5. Si $F \subset G$, alors $F \cup G = G$, donc $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de E ; de même si $G \subset F$. Réciproquement, supposons que $F \not\subset G$ et $G \not\subset F$. Soient alors $u \in G \backslash F$ et $v \in F \backslash G$; on a donc $u, v \in F \cup G$. Notons $w = u + v$. Si $w \in F$, alors $v = w - u \in F$, ce qui est absurde ; et de même, $w \in G$ est absurde. Donc $w \notin F \cup G$. Donc $F \cup G$ n'est pas stable par $+$, donc $F \cup G$ n'est pas un sous-espace vectoriel de E.

Exercice 7.

(a) Non : ces deux sous-espaces engendrent au plus un sous-espace de dimension 3.

(b) Oui : la famille (v_1, v_2, v_4, v_5) est libre (le vérifier !)

(c) Non : $v_3 + v_4 = v_5$, donc ces deux sous-espaces ne sont pas en somme directe.

(d) Non : $v_4 = v_5 - v_3$, donc ces deux sous-espaces ne sont pas en somme directe.

Exercice 9.

(a) Faux : $(1, 1, 0, 0) = v_1 + v_2 \in \mathrm{Vect}(v_1, v_2, v_3)$, et $\notin \mathrm{Vect}(v_4, v_5)$.

(b) Vrai : $(1, 1, 0, 0) = v_1 + v_2 = \dfrac{1}{2}(v_3 - v_2)$.

(c) Faux : $v_3 = 2v_1 + 3v_2 \in \mathrm{Vect}(v_1, v_2) \cap \mathrm{Vect}(v_3, v_4)$.

(d) Faux : Comme $v_3 = 2v_1 + 3v_2$, $\mathrm{Vect}(v_1, v_2) + \mathrm{Vect}(v_2, v_3, v_4) \subset \mathrm{Vect}(v_1, v_2, v_4) \neq \mathbb{R}^4$.

(e) Vrai : la famille (v_1, v_2, v_4, v_5) est libre dans $\mathbb{R}^4$ (le vérifier !), donc génératrice de $\mathbb{R}^4$.

Exercice 10.

(c) Soit $u = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$:

$$u \in H \Leftrightarrow 3x - 2y + z - 5t = 0 \Leftrightarrow u = (x, y, -3x + 2y + 5t, t) = x(1, 0, -3, 0) + y(0, 1, 2, 0) + t(0, 0, 5, 1),$$

donc la famille $((1, 0, -3, 0), (0, 1, 2, 0), (0, 0, 5, 1))$ est génératrice de H.

(d) Soit $u = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$:

$$u \in I \Leftrightarrow 2x - y = z + 3t = 0 \Leftrightarrow u = (x, 2x, -3t, t) = x(1, 2, 0, 0) + t(0, 0, -3, 1),$$

donc la famille $((1, 2, 0, 0), (0, 0, -3, 1))$ est génératrice de I.

Exercice 14.

(a) Oui

(b) Oui

(c) Oui : soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ tels que $\lambda_1(3u_1 + u_3) + \lambda_2 u_3 + \lambda_3(u_2 + u_3) = 0_E$, alors $3\lambda_1 u_1 + \lambda_3 u_2 + (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)u_3 = 0_E$, donc, comme (u_1, u_2, u_3) est libre : $3\lambda_1 = \lambda_3 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$, donc $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

(d) Non : les vecteurs $2u_1 + u_2$, $u_1 - 3u_2$ et $u_2 - u_1$ sont coplanaires (ils appartiennent tous trois au plan $\mathrm{Vect}(u_1, u_2)$.

Exercice 15. Notons $u_1 = (1, 0, 1, 1)$, $u_2 = (-1, -2, 3, -1)$, $u_3 = (-5, -3, 1, 5)$ et $v_1 = (-1, -1, 1, -1)$, $v_2 = (4, 1, 2, 4)$. On a : $v_1 + v_2 = (3, 0, 3, 3) = 3u_1$ et $3v_1 + v_2 = (1, -2, 5, 1) = 2u_1 + u_2$, donc $v_1 + v_2$ et $3v_1 + v_2 \in F$, donc $v_1, v_2 \in F$, donc $G \subset F$.

Exercice 16.

(d) Si $a = 1$, la famille est liée, donc n'est pas une base de $\mathbb{R}^3$.

Si $a \neq 1$: soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda_1(1, 1, a) + \lambda_2(1, a, 1) + \lambda_3(a, 1, 1) = 0_{\mathbb{R}^3}$, alors $\left\{\begin{array}{rcl} \lambda_1 + \lambda_2 + a\lambda_3 & = & 0 \\ \lambda_1 + a\lambda_2 + \lambda_3 & = & 0 \\ a\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 & = & 0 \end{array}\right.$,

donc $\left\{\begin{array}{rcl} \lambda_1 + \lambda_2 + a\lambda_3 & = & 0 \\ (a-1)\lambda_2 + (1-a)\lambda_3 & = & 0 \\ (1-a)\lambda_2 + (1-a^2)\lambda_3 & = & 0 \end{array}\right.$, donc $\left\{\begin{array}{rcl} \lambda_1 + \lambda_2 + a\lambda_3 & = & 0 \\ \lambda_2 - \lambda_3 & = & 0 \\ (2+a)\lambda_3 & = & 0 \end{array}\right.$ donc $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Donc la famille est libre, donc engendre $\mathbb{R}^3$. C'est donc une base de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 17.

(e) Soit $M \in M_n(R)$. On a :

$$M \in I \Leftrightarrow M = M^\intercal \Leftrightarrow (\forall i, j \in [\![1, n]\!],\ m_{ij} = m_{ji}) \Leftrightarrow M = \sum_{1 \leq i < j \leq n} m_{ij}(E_{ij} + E_{ji}) + \sum_{i=1^n} m_{ii} E_{ii},$$

donc une base de I est la famille $(E_{ij} + E_{ji})_{1 \leq i < j \leq n} \cup (E_{ii})_{1 \leq i \leq n}$.

(f) Soit $M \in M_n(R)$. On a :

$$M \in J \Leftrightarrow M = -M^\intercal \Leftrightarrow (\forall i, j \in [\![1, n]\!],\ m_{ij} = -m_{ji}) \Leftrightarrow M = \sum_{1 \leq i < j \leq n} m_{ij}(E_{ij} - E_{ji}),$$

donc une base de I est la famille $(E_{ij} - E_{ji})_{1 \leq i < j \leq n}$.

Exercice 18. Comme $w = 2u - 3v$, une base de F est (u, v). Par mise sous forme Vect, une base de G est $((1, 0, -1), (0, 1, -1))$.
Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, on a : $w = \lambda u + \mu v \in G \Leftrightarrow (\lambda + \mu) + (-\lambda + \mu) + (2\lambda - \mu) = 0 \Leftrightarrow 2\lambda + \mu = 0 \Leftrightarrow w = \lambda(u - 2v)$.
Donc $F \cap G = \mathrm{Vect}(u - 2v)$; une base de $F \cap G$ est donc $(u - 2v) = ((-1, -3, 4))$.