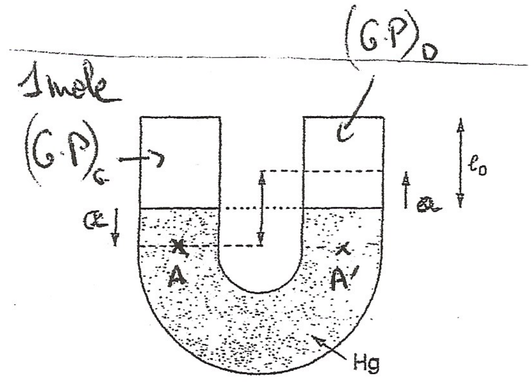
Correction TD statique

Ex 1.

1 mole.



Etat initial. $\xrightarrow[\text{le gaz à gauche}]{\text{on chauffe}}$ Etat Final.

$(G.P)_G$: P_0, V_0, T_0.

$(G.P)_D$: P_0, V_0, T_0

$(GP)_G$: (P_G ? T_G ?

$V_G = V_0 + a \cdot S$
$= (\ell_0 + a) S$

$(GP)_D$: T_0
P_D ?
$V_D = V_0 - aS$
$= (\ell_0 - a) S$

P_0, V_0, T_0, a sont donnés, il y a donc.
3 grandeurs à déterminer P_G; T_G; P_D.
il faut donc écrire 3 relations pour déterminer $P_G . T_G . P_D$.

* - Equation d'état pour le $(G.P)_D$ $\quad P_D \cdot (\ell_0 - a) S = RT_0 = P_0 V_0 = P_0 \cdot \ell_0 \cdot S$

$$\rightarrow \boxed{P_D = P_0 \left(\frac{\ell_0}{\ell_0 - a}\right) > P_0}$$

** $P_{Hg}(A) = P_{Hg}(A') = P_D + 2\rho_{Hg} g a$. or $P_{Hg}(A) = P_G$.

$$\rightarrow \boxed{P_G = P_D + 2\rho g a = P_0 \left(\frac{\ell_0}{\ell_0 - a}\right) + 2\rho_{Hg} \cdot g a.}$$

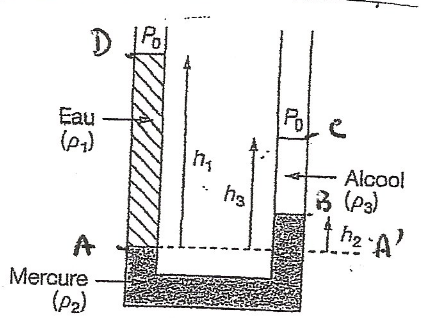
*** Equation d'état pour le $(GP)_G$.

$P_G \cdot V_G = RT_G \rightarrow T_G = \dfrac{P_G \cdot V_G}{R}$ $\quad$ or $P_0 V_0 = RT_0$

$$\Rightarrow T_G = \frac{T_0}{P_0 V_0} \left[P_0 \left(\frac{\ell_0}{\ell_0 - a}\right) + 2\rho_{Hg} \cdot g \cdot a\right] (\ell_0 + a) S$$

$$\Rightarrow \boxed{T_G = T_0 \frac{(\ell_0 + a)}{\ell_0} \cdot \left[\frac{\ell_0}{\ell_0 - a} + \frac{2\rho_{Hg} \cdot g \cdot a}{P_0}\right]}$$

Ex2. $\boxed{h_3 = 0{,}2\,m.}$



Calcul de ρ_3 en fonction de $h_1 \cdot h_2, h_3$

$P_A = P_0 + \rho_1 g h_1$ (pression ds l'eau).

$P_A(\text{eau}) = P_A(\text{Hg})$

et $P_A(\text{Hg}) = P_{A'}(\text{Hg}) = P_B(\text{Hg}) + \rho_2 \cdot g \cdot h_2$

et

$P_B(\text{Hg}) = P_B(\text{Alcool})$

$= P_0 + \rho_3 g (h_3 - h_2)$

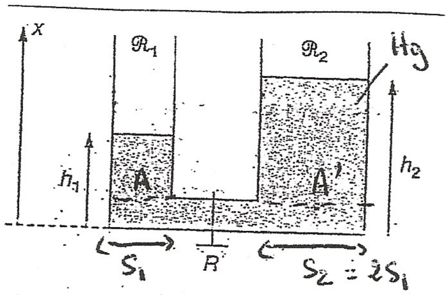
d'où

$$\cancel{P_0} + \rho_1 g h_1 = \cancel{P_0} + \rho_3 g (h_3 - h_2) + \rho_2 g h_2$$

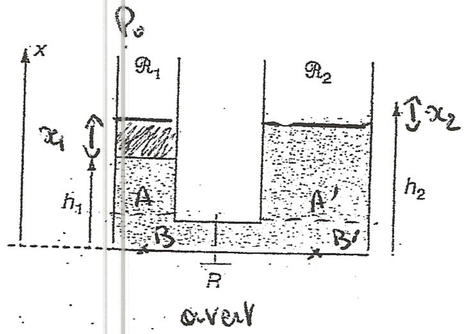
$$\Rightarrow \boxed{\rho_3 = \frac{\rho_1 h_1 - \rho_2 h_2}{h_3 - h_2}} = \frac{1000 \cdot 0{,}8 - 13600 \cdot 0{,}05}{0{,}2 - 0{,}05} = 800\,kg\,m^{-3}$$

Ex3 liquides non miscibles.

$h_1 = h.$



On ouvre $\xrightarrow{\quad}$ R.



ouvert

Calcul de x_1 et x_2 en fonction de h. (2 inconnues) $\Rightarrow$ 2 relations à écrire. ($\hat{n}$ niveau de Hg à D et à C)

* le Hg ds les 2 compartiments ne forment plus qu'un seul système en équilibre. $P_B = P_{B'}$ avec $P_B = P_0 + \rho g (h_1 + x_1)$

$P_{B'} = P_0 + \rho g (h_2 - x_2)$.

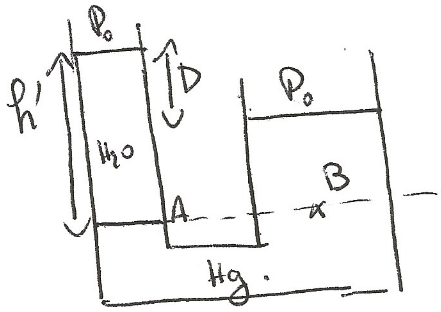
d'où $\rho g (h_1 + x_1) + P_0 = P_0 + \rho g (h_2 - x_2) \Rightarrow h_1 + x_1 = h_2 - x_2$

* Conservation du volume $x_1 S_1 = x_2 S_2 = 2 x_2 S_1 \rightarrow x_2 = \frac{x_1}{2}$.

$$\begin{cases} h_1 + x_1 = h_2 - x_2 \\ x_2 = \dfrac{x_1}{2} \end{cases} \Rightarrow h + x_1 = \frac{3}{2}h - \frac{x_1}{2} \Rightarrow \frac{3}{2}x_1 = \frac{h}{2} \rightarrow \boxed{x_1 = \frac{h}{3}}$$

et $\boxed{x_2 = \dfrac{h}{6}}$

b] On verse une hauteur h' d'eau → ∃ une dénivellation D entre les 2 surfaces libres.



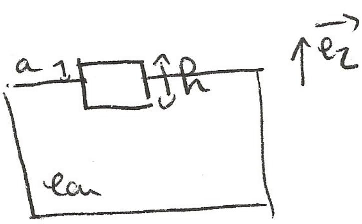
$$P_A = P_0 + \rho_{H_2O}\, g h' = P_B = P_0 + \rho_{Hg}\, g (h'-D).$$

$$\rho_{H_2O}\, h' \cancel{g} = \rho_{Hg} \cdot \cancel{g}\,(h'-D).$$

$$D = \left(\frac{\rho_{Hg} - \rho_{H_2O}}{\rho_{Hg}}\right) h' = \boxed{\left(1 - \frac{\rho_{H_2O}}{\rho_{Hg}}\right) h' = D}$$

c] Glace immergé :

le glaçon est à l'équilibre sous l'action de son poids $\vec{P} = -\rho_g \cdot h \cdot S \cdot g\, \vec{e_z}$ et de la force d'Archimède $\vec{\Pi} = \rho_{air} \cdot a S g\, \vec{e_z} + \rho_{eau} (h-a) \cdot S g\, \vec{e_z}$



$$\Sigma \vec{F}_{/glace} = \vec{0} \Rightarrow -\rho_g h + \rho_{air}\, a + \rho_{eau}(h-a) = 0.$$

$$a[\rho_{air} - \rho_{eau}] + h[\rho_{eau} - \rho_g] = 0$$

$$\rightarrow \boxed{a = h \cdot \frac{[\rho_{eau} - \rho_g]}{\rho_{eau} - \rho_{air}}} \quad \text{AN} \quad a = h \cdot \frac{[1000 - 920]}{1000 - 1{,}2} \simeq 0{,}08h = 8\%\, h$$

Lorsque le glaçon est maintenu à la lisière de l'eau.

$$\Sigma \vec{F} = \vec{0} \quad -F_{op} + \rho_{eau} \cdot g \cdot h \cdot S - \rho_g \cdot g \cdot h \cdot S = 0 \rightarrow \boxed{F_{op} = (\rho_{eau} - \rho_g) \cdot h \cdot \pi R^2 g}.$$

$$\text{AN} \quad F_{op} = 0{,}03\pi\,(0{,}01)^2 \cdot 9{,}81 \cdot 80 = \boxed{7{,}4 \cdot 10^{-3}\, N = F_{op}}$$

5] Fonte d'un glaçon.

Le glaçon a un volume total $= V_g$.

Son volume immergé est V_i.

Le glace est à l'équilibre.

$$\vec{P} + \vec{F}_{arch} = 0$$

$$\rho_g V_g g - \rho_e V_i g = 0$$

$$\boxed{\rho_g V_g = \rho_e V_i} \quad (C.E)$$

et $h.S = \cancel{\rho_e} V_0 + V_i$

$\uparrow$ volume d'eau initialement présent

Le glaçe fondu occupe un volume V_L.

avec $h'.S = V_0 + V_L$.

La masse m de glaçe se conserve.

$$m = \rho_g V_g = \rho_L V_L.$$

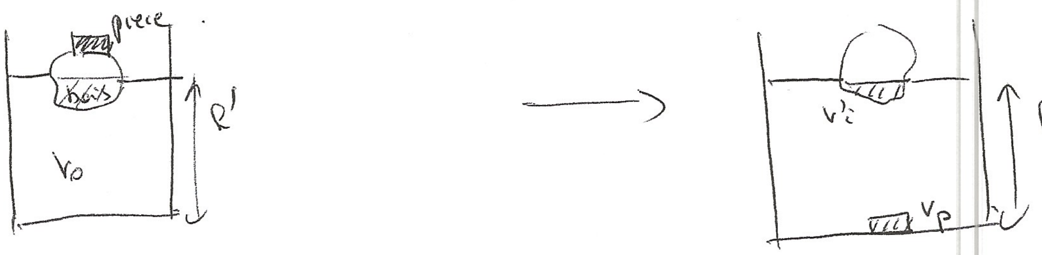
or $\rho_g V_g = \rho_L V_i$ (C.E)

d'où $V_L = V_i$

et $h'S = V_0 + V_i = h.S$

$$\Rightarrow \boxed{h' = h}.$$

6] Solide flottant.



Le volume immergé est V_i

m_p = masse de la pièce $= \rho_p V_p$.

V_p = volume de la pièce.

Equilibre de (pièce + bois).

$$(m_p + \rho_b V_b) g - \rho_e V_i g = 0$$

$$\Rightarrow V_i = \frac{\rho_p V_p + \rho_b V_b}{\rho_L}.$$

$$h'S = V_0 + V_i$$

Le volume immergé est V'_i

Equilibre du bois :

$$\rho_b V_b g - \rho_e V'_i g = 0$$

$$V'_i = \frac{\rho_b}{\rho_L} V_b = V_i - \frac{\rho_p V_p}{\rho_L}.$$

et $h''S = V_0 + V'_i + V_p$

$$= \underbrace{V_0 + V_i}_{h'S} + V_p\left(1 - \frac{\rho_p}{\rho_L}\right)$$

$$= h'S + V_p \underbrace{\left(1 - \frac{\rho_p}{\rho_L}\right)}_{<0}$$

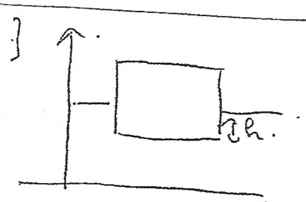
$h'' < h'$

$\Uparrow$

$$\Rightarrow \boxed{h'' = h' - \frac{V_p}{S}\left(1 - \frac{\rho_p}{\rho_L}\right)}$$

$$h_1 S - h_0 S = \left(\frac{\rho_e - \rho_p}{\rho_e}\right) V_p = \left(1 - \frac{\rho_p}{\rho_e}\right) V_p < 0$$ le niveau baisse.

ex 7.

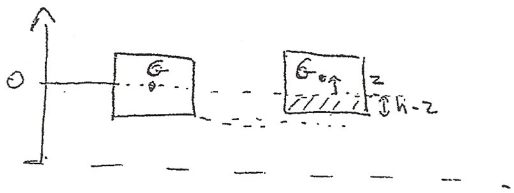


a] cube en éq. $\vec{P} + \vec{\Pi} = \vec{0}$.

$$-\rho_b \cdot a^3 g + \rho_e \cdot h \cdot a^2 g = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{h = \frac{\rho_b}{\rho_e} \cdot a} = 0{,}5\,m.$$

b]. Oscillations verticale.



$\vec{OG} = z\,\vec{e_z} + (\quad)$.

Theoreme du centre d'inertie.

$m\,\vec{a_G} = \vec{P} + \vec{\Pi}$.

$$m\ddot{z} = \underbrace{-\rho_b \cdot a^3 g + \rho_e a^2 g\,(h}_{=0\ (CE)} - z) \Rightarrow m\ddot{z} + \rho_e \cdot a^2 g\, z = 0. \Rightarrow \boxed{\ddot{z} + \frac{\rho_e \cdot g}{\rho_b \cdot a}\, z = 0.}$$

$$\boxed{\omega_e = \sqrt{\frac{\rho_e}{\rho_b} \cdot \frac{g}{a}}}$$

8] Etude d'un aérostat

1] $T(z) = T_0(1 - kz)$ avec $k = 2{,}2 \cdot 10^{-5}\ m^{-1}$ avec $T(z) \searrow$ lorsque $z \nearrow$.

Rq $\dfrac{T(z) - T_0}{T_0} = -kz \iff k = \dfrac{|\Delta T|}{T_0 \Delta z} = 2{,}2 \cdot 10^{-5}$.

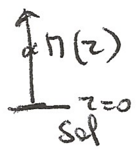
$\Rightarrow \dfrac{\Delta T}{\Delta z} = T_0 \cdot k = 290 \cdot 2{,}2 \cdot 10^{-5} = 0{,}0064\ K\,m^{-1} \Rightarrow$

La température décroit de $0{,}6\ °C$ tous les $100\ m$.

1] équation de la statique : $\vec{grad}\, P = \rho \vec{g}$.

avec $PV = nRT = \dfrac{m}{M} RT \rightarrow \rho = \dfrac{m}{V} = \dfrac{P \cdot M}{RT}$.

d'où en projection sur $\vec{e_z}$



$\dfrac{dP}{dz} = \dfrac{-PM \cdot g}{RT_0(1-kz)}$

$\Rightarrow \dfrac{dP}{P} = -\dfrac{Mg}{RT_0} \cdot \dfrac{dz}{1-kz} \Rightarrow \begin{cases} \ln P = \dfrac{Mg}{kRT_0} \cdot \ln(1-kz) + cste. \\ \ln P_0 = 0 + cste. \end{cases}$

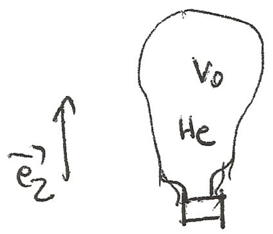
$\Rightarrow \ln \dfrac{P}{P_0} = \ln(1-kz)^{\alpha}$ avec $\alpha = \dfrac{Mg}{kRT_0}$. $\Rightarrow \boxed{P = P_0 (1-kz)^{\alpha}}$

AN $\alpha = \dfrac{29 \cdot 10^{-3} \cdot 9{,}81}{2{,}2 \cdot 10^{-5} \cdot 8{,}31 \cdot 290} = \boxed{5{,}35 = \alpha.} > 1 \Rightarrow P(z) \searrow$ lorsque $z \nearrow$.

2] $\rho = \dfrac{PM}{RT} = \dfrac{P_0 (1-kz)^{\alpha} \cdot M}{RT_0 (1-kz)} = \rho_0 (1-kz)^{\alpha - 1} \Rightarrow \boxed{\rho(z) = \rho_0 (1-kz)^{\alpha-1}}$

$\rho(z) \searrow$ lorsque $z \nearrow$.

Aerostat.



M_0 = masse totale

Hélium et air en équilibre
mécanique $P_{He} = P_{air}$
thermique $T_{He} = T_{air}$

d'où $P_{He} \cdot V_{He} = \frac{m_{He}}{M'} \cdot R T_{He}$ et $P_{air} \cdot V_{air} = \frac{m_{air}}{M} \cdot R T_{air}$.

d'où $\frac{\rho_{He}}{M'} = \frac{\rho_{air}}{M} \Rightarrow \rho_{He} = \frac{M'}{M} \rho_{air} = \boxed{\underbrace{\frac{M'}{M} \rho_0}_{\rho_{He}(z=0)} (1-kz)^{\alpha-1} = \rho_{He}}$

1] Le ballon est soumis à

$\vec{F}_{arch} = -\rho_{air} V_0 \vec{g} = \rho_{air} V_0 g \vec{e_z}$

$\vec{P}_{He} = \rho_{He} \cdot V_0 \vec{g} = -\rho_{He} \cdot V_0 g \vec{e_z}$

$\vec{P}_{nacelle + eq} = M_0 \cdot \vec{g} = -M_0 g \vec{e_z}$

$\vec{R} = (\rho_{air} V_0 g - \rho_{He} V_0 g - M_0 g) \vec{e_z}$
$= \left(\frac{M}{M'} \rho_{He} V_0 g - \rho_{He} V_0 g - M_0 g\right) \vec{e_z}$
doit être dirigée vers le haut →

$\rho_{He}\left(\frac{M}{M'} - 1\right) V_0 - M_0 > 0 \rightarrow V_0 > \frac{M_0}{\rho_{He}(z=0)} \cdot \frac{M'}{M-M'} = \frac{M_0}{\rho_{air}(0)} \cdot \frac{M}{M-M'}$

$\Rightarrow \boxed{(V_0)_{min} = \frac{M_0 \cdot M}{\rho_{air}(0)\,(M-M')}}$

AN $\rho_{air}(z=0) = \frac{P_0 \cdot M}{R T_0} = \frac{10^5 \cdot 29 \cdot 10^{-3}}{8{,}31 \cdot 290}$

$\rho_{air}(z=0) = 1{,}2\ kg\,m^{-3}$. $(V_0)_{min} = \frac{400 \cdot 29}{1{,}2\,(29-4)} = \boxed{387\ m^3 = (V_0)_{min}}$

2°] $\rho_{He} = \frac{m_{He}}{V} \Rightarrow \rho_{He} \cdot V = cste \Rightarrow \rho_{He}(z) \cdot V(z) = \rho_{He}(z=0) \cdot V_0$.

$\Rightarrow V(z) = V_0 \frac{\rho_{He}(0)}{\rho_{He}(z)} = V_0 \cdot \frac{\rho_{He}(0)}{\rho_{He}(0)(1-kz)^{\alpha-1}} = V_0 (1-kz)^{1-\alpha}$.

$$\boxed{V(z) = V_0 (1 - kz)^{1-\alpha}}$$ lorsque $z \nearrow$ $(1-kz)^{\alpha-1} \searrow$ $\Rightarrow V(z) \nearrow$.

et $\boxed{V_{max} = V_0 (1 - kz_1)^{1-\alpha}}$

$$\Rightarrow \boxed{z_1 = \frac{1 - \left(\frac{V_{max}}{V_0}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}}{k}} = 5{,}5 \text{ km}.$$

$$\vec{R}(z) = \left(\left(\frac{M}{M'} - 1\right) \underbrace{\rho_{He}(z) \cdot V(z)}_{m_{He} = cte} - m_0\right) g \, \vec{e_z}.$$ Durant cette phase $\vec{R}(z) = \vec{cte}$.

3] lorsque $z \geq z_1$ $V = V_{max} = cte$ et $\rho_{He}(z) \searrow$ d'où $m_{He}(z) \searrow$

et $\|\vec{R}\| \searrow$.

lorsque $\vec{R} = \vec{0}$, l'altitude maximale est atteinte.

$$R = \frac{M - M'}{\cancel{M'}} \cdot \frac{\cancel{M'}}{M} \rho_0 (1 - kz_2)^{\alpha-1} \cdot V_{max} - m_0 = 0$$

$$(1 - kz_2)^{\alpha-1} = \frac{m_0 \cdot M}{(M - M')\rho_0 \cdot V_{max}} = \frac{(V_0)_{min}}{V_{max}}.$$

$$\boxed{z_2 = \frac{1 - \left(\frac{(V_0)_{min}}{V_{max}}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}}{k}}$$ AN : $\boxed{z_2 = 5{,}8 \text{ km}}$