Devoir à la maison n° 11
CORRIGÉ

Exercice 1.

1. • Comme F est sous forme Vect, c'est par définition un sous-espace vectoriel de E.
   En détail : $0_E = 0 \times u_0$, donc $0_E \in F$. Soient $u = \alpha u_0$ et $v = \beta u_0 \in F$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, alors :
   $$\lambda u + \mu v = (\lambda\alpha + \mu\beta)u_0 \in F,$$
   donc F est non vide et stable par combinaison linéaire ; c'est donc un sous-espace vectoriel de E.
   • Comme G est l'ensemble des solutions de l'équation linéaire homogène $x + y - z - t = 0$, c'est également un sous-espace vectoriel de E.
   En détail : $0 + 0 = 0 + 0$, donc $0_E \in G$. Soient $u = (x, y, z, t)$ et $v = (a, b, c, d) \in G$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, alors : $\lambda u + \mu v = (\underbrace{\lambda x + \mu a}_{X}, \underbrace{\lambda y + \mu b}_{Y}, \underbrace{\lambda z + \mu c}_{Z}, \underbrace{\lambda t + \mu d}_{T})$, avec :
   $$X + Y = \lambda(x + y) + \mu(a + b) = \lambda(z + t) + \mu(c + d) = Z + T,$$
   donc $\lambda u + \mu v \in G$. Donc G est un sous-espace vectoriel de E.
2. Comme $1 + 1 \neq 0 + 0$, $u_0 \notin G$. Donc $F \cap G = \{0_E\}$.
   En détail : soit $u = (x, y, z, t) \in F \cap G$. Comme $u \in F$, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $x = y = \lambda$, et $z = t = 0$. Comme $u \in G$, $x + y = z + t$, donc $2\lambda = 0$, donc $\lambda = 0$, donc $u = 0_E$. Donc F et G sont en somme directe.
3. Soient $u = (x, y, z, t) \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors $u - \lambda u_0 = (x - \lambda, y - \lambda, z, t)$, donc :
   $$u - \lambda u_0 \in G \Leftrightarrow (x - \lambda) + (y - \lambda) = z + t \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{2}(x + y - z - t).$$
   Il y a toujours une solution, d'où l'assertion voulue. Comme $\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \lambda u_0 \in F$, celle-ci peut se réécrire : $\forall v \in E,\ \exists u \in F,\ \exists w \in G,\ v = u + w$, autrement dit : $E = F + G$. Comme F et G sont de plus en somme directe, ils sont donc supplémentaires.
4. Avec les notations précédentes, on a pour $v = (3, 8, 9, 6)$: $\lambda = -2$, d'où $u = -2u_0 = (-2, -2, 0, 0) \in F$, d'où $w = v - u = (5, 10, 9, 6) \in G$. On a donc $v = u + w$.

Exercice 2.

1. Les polynômes $T_0 = 1$ et $T_1 = X$ conviennent. Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que T_n et T_{n+1} existent. On sait que : $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2,\ \cos(a) + \cos(b) = 2\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)\left(\frac{a+b}{2}\right)$. Donc :
   $$\forall x \in \mathbb{R},\ \cos((n + 2)x) + \cos(nx) = 2\cos(x)\cos((n + 1)x),$$
   donc $\cos((n + 2)x) = 2T_1(\cos x)T_{n+1}(\cos x) - T_n(\cos x)$. Le terme de droite étant une fonction polynomiale, T_{n+2} existe donc. Par récurrence, T_n existe donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, et vérifie la formule indiquée.

2. On a déjà $T_0 = 1$ et $T_1 = X$. La formule de récurrence donne ensuite :

$$T_2 = 2X^2 - 1, \quad T_3 = 4X^3 - 3X, \quad T_4 = 8X^4 - 8X^2 + 1, \quad T_5 = 16X^5 - 20X^3 + 5X...$$

   Ce sont les polynômes de Tchebychev*, dûs au mathématicien russe Pafnouti Tchebychev (1821-1894).*

3. Une récurrence immédiate montre que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \deg(T_n) = n$. La famille (T_n) est donc *échelonnée en degré*, donc libre comme vu en cours.

4. Notons, pour $n \in \mathbb{N}$, $t_n : x \mapsto T_n(x)$; on a donc $f_n = t_n \circ \cos$. Comme $\cos(\mathbb{R}) = [-1, 1]$, la famille (f_n) est libre si et seulement si la famille $(t_n|_{[-1,1]})$ est libre.
   Or, si cette dernière famille est liée, alors il existe une combinaison linéaire non triviale (c'est-à-dire avec des coefficients non tous nuls) des polynômes T_n nulle sur $[-1, 1]$, donc égale au polynôme nul (car un polynôme non nul n'a qu'un nombre fini de racines), ce qui est impossible puisque la famille (T_n) est libre. Donc la famille (f_n) est libre.