PC* (Lycée Bellevue) 2024/2025

Devoir du 26 Mars 2025 (4h) (Corrigé)

Option CCINP : les exercices et on avance dans le problème. L'autre option : on attaque d'emblée le problème.

Exercice 1

Soit $f : (\mathbb{R}_+^*)^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = x + y + \frac{1}{xy}$.
1) Etablir que $(1,1)$ est le seul point critique de f.
2) A l'aide de la matrice hessienne, préciser s'il s'agit d'un minimum local ou d'un maximum local.
3) Pour m un entier naturel supérieur à 2, on note K_m l'ensemble $[\frac{1}{m}, m]^2$.
a) Dessiner K_m en précisant sa frontière et son intérieur.
b) Etablir l'existence d'un point (a,b) de K_m tel que :
$\forall (x,y) \in K_m,\ f(x,y) \geq f(a,b)$.
c) Prouver que $(a,b) = (1,1)$ et conclure quant à la nature exacte de ce point.
Solution :
1) On remarque que $U = (\mathbb{R}_+^*)^2$ est bien un ouvert sur lequel f (fonction rationnelle définie sur U) est de classe C^∞.
$(x,y) \in U$ est point critique de $f \iff \begin{cases} x^2y = 1 \\ y^2x = 1 \end{cases}$. Ce qui donne $x = y$ et $x^3 = 1$ donc $\underline{x = y = 1}$ puisqu'on travaille avec des réels $\square$
2)La matrice hessienne de f en $(1,1)$ est $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Son déterminant et sa trace étant strictement positifs, on a $A \in S_2^{++}(\mathbb{R})$ et $\underline{(1,1) \text{ est un minimum local strict pour } f}$$\square$
3)a) La frontière de K_m est le rectangle bordant et l'intérieur est $]\frac{1}{m}, m[^2$$\square$
b) f est continue sur le COMPACT K_m et à valeurs réelles, elle présente bien un minimum global sur $K_m$$\square$
c) $K_m \subset U$ donc (a,b) est un point critique de f ; celui-ci étant unique : $\underline{\text{(a,b) = (1,1)}}$.
$\underline{(1,1) \text{ est donc un minimum global strict de } f}$$\blacksquare$

Exercice 2

On considère l'équation différentielle (E) : $x^2y'' + 4xy' + (2 - x^2)y = 1$
Soit f la somme de la série entière $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ dont le rayon de convergence est noté $R >$.
1) Montrer que f est solution de (E) sur $]-R, R[$ si et seulement si :
$a_0 = \frac{1}{2}$, $a_1 = 0$ et $a_n = \frac{a_{n-2}}{(n+2)(n+1)}$ pour tout $n \geq 2$.
2) Prouver alors que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $a_{2p+1} = 0$ et $a_{2p} = \frac{1}{(2p+2)!}$.
3) Déterminer R.
4) En déduire qu'il existe une unique solution f de (E) sur $\mathbb{R}$ développable en

série entière sur $\mathbb{R}$.
Exprimer f à l'aide des fonctions usuelles.
Solution :
1) f en tant que somme d'une série entière est de classe C^∞ sur $]-R,R[$ et f y est solution de (E) ssi (dérivation terme à terme légitime pour une telle somme de série de fonctions) : $\forall x \in]-R,R[$,
$\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n x^n + 4\sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^n + 2\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+2} = 1$,
soit (après regroupement des trois premières sommes et changement d'indice $j = n+2$ pour la dernière)
$\sum_{n=0}^{\infty}(n^2+3n+2)a_n x^n - \sum_{j=2}^{\infty} a_{j-2}x^{j-2} = 1$.
Puis en isolant les deux premiers termes de la somme de gauche,
$2a_0 + 6a_1 x + \sum_{n=2}^{\infty}((n^2+3n+2)a_n - a_{n-2})x^n = 1$ donc
par unicité des coefficients d'une série entière $2a_0 = 1$, $a_1 = 0$ et $a_n = \frac{a_{n-2}}{(n+2)(n+1)}$ pour tout $n \geq 2\square$
2) A partir de $a_1 = 0$ et de la relation de récurrence obtenue en 1) donne la nullité de tous les coefficients d'indices impairs. L'expression des coefficients d'indices pairs se valide par une récurrence directe$\square$
3) Pour tout n, $|a_n| \leq \frac{1}{n!}$ donc, par propriété du rayon de convergence, $\rho(\sum_{n\geq 0} a_n x^n) \geq \rho(\sum_{n\geq 0}\frac{1}{n!}x^n) = +\infty$. Ainsi $\underline{R = +\infty}\square$
4) Les questions précédentes montre existence et unicité d'une telle solution.
De plus, pour tout réel x, $f(x) = \sum_{p=0}^{\infty}\frac{x^{2p}}{(2p+2)!} = \sum_{q=1}^{\infty}\frac{x^{2(q-1)}}{(2q)!}$ ou si $x \neq 0$
$\underline{f(x) = \frac{chx-1}{x^2}}$.
Cette formule vaut aussi pour $x = 0$ par passage à la limite$\blacksquare$

Problème

Le problème étudie quelques propriétés de variables aléatoires réelles finies de la forme $\sum_{k=1}^{n} a_k X_k$, où les a_k sont des réels et les X_k sont des variables aléatoires mutuellement indépendantes à valeurs dans $\{1,-1\}$
La première partie établit des résultats sur des intégrales, utilisés dans les parties suivantes.
À partir de la deuxième partie, on suppose donnée une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires mutuellement indépendantes définies sur un espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{A},P)$, à valeurs dans $\{1,-1\}$ et vérifiant

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad P(X_k = 1) = P(X_k = -1) = \frac{1}{2}$$

I Suites et intégrales

I. A - Étude d'une intégrale à paramètre

Pour $x \in \mathbb{R}^+$, on pose

$$f(x)=\int_0^{\infty}\frac{1-\cos t}{t^2}\mathrm{e}^{-xt}\ \mathrm{d}t$$

I.A.0) Etablir que $\phi : t>0 \to \frac{1-\cos t}{t^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.
I.A.1) Montrer que f est définie et continue sur $[0,+\infty[$ et de classe C^2 sur $]0,+\infty[$.
I.A.2) Déterminer les limites de f et f' en $+\infty$.
I.A.3) Exprimer f'' sur $]0,+\infty[$ à l'aide de fonctions usuelles et en déduire que

$$\forall x>0,\quad f'(x)=\ln(x)-\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)$$

I.A.4) Montrer

$$\begin{cases}\forall x>0, & f(x)=x\ln(x)-\frac{1}{2}x\ln\left(x^2+1\right)-\arctan(x)+\frac{\pi}{2}\\ f(0)=\frac{\pi}{2}\end{cases}$$

I.A.5) Montrer

$$\forall s\in\mathbb{R},\quad |s|=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{1-\cos(st)}{t^2}\ \mathrm{d}t$$

I.B - Étude d'une suite d'intégrales

Dans cette section, on étudie la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad u_n=\int_0^{\infty}\frac{1-(\cos t)^n}{t^2}\ \mathrm{d}t$$

I.B.1) Justifier l'existence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et préciser la monotonie de la sous-suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}^*}$.
I.B.2) Montrer que $u_1=u_2=\frac{\pi}{2}$.
I.C - Calcul d'un équivalent de u_n
I.C.1) Montrer que

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad u_n=\frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{2}}v_n\quad \text{avec}\quad v_n=\int_0^{\infty}\frac{1-(\cos(\sqrt{2u/n}))^n}{u\sqrt{u}}\ \mathrm{d}u$$

I.C.2) Montrer que

$$\forall (n,u)\in\mathbb{N}^*\times]\,0,1]\,,\quad \left|1-(\cos(\sqrt{2u/n}))^n\right|\leqslant u$$

I.C.3) Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ admet une limite finie l vérifiant

$$l=\int_0^{\infty}\frac{1-\mathrm{e}^{-u}}{u\sqrt{u}}\ \mathrm{d}u$$

I.C.4) On admet la relation $\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{u}}\ \mathrm{d}u=\sqrt{\pi}$.
Conclure que $u_n\sim\sqrt{\frac{n\pi}{2}}$.

II Autour du pile ou face

Dans cette partie, comme il est indiqué dans le préambule, on considère une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires mutuellement indépendantes, à valeurs dans $\{1,-1\}$ et telles que, pour tout $k\in\mathbb{N}^*$,

$$P\left(X_k=1\right)=P\left(X_k=-1\right)=\frac{1}{2}$$

Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on pose $S_n=X_1+\cdots+X_n$.
L'espérance d'une variable aléatoire réelle finie Z est notée $E(Z)$ et sa variance $V(Z)$.

II.A - Étude de $E\left(|S_n|\right)$

II.A.1) Déterminer l'espérance et la variance de S_n.

II.A.2) Soit S et T deux variables aléatoires réelles finies indépendantes définies sur $(\Omega,\mathcal{A},P)$. On suppose que T et $-T$ ont même loi.
Montrer que $E(\cos(S+T))=E(\cos(S))E(\cos(T))$.

II.A.3) On considère la fonction φ_n de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $\varphi_n(t)=E\left(\cos\left(S_n t\right)\right)$ pour tout réel t.

Montrer que $\varphi_n(t)=(\cos t)^n$ pour tout entier $n\in\mathbb{N}^*$ et tout réel t.

II.A.4) Montrer, pour tout $n\in\mathbb{N}^*, E\left(|S_n|\right)=\frac{2}{\pi}u_n$.

On utilisera l'expression intégrale de la valeur absolue obtenue à la question I.A.5.

II.A.5) Déduire de la question précédente que, pour tout $n\in\mathbb{N}, u_{2n+1}=u_{2n+2}$.

II.B - Étude de $\frac{S_n}{n}$

On se propose de démontrer que la suite $\left(\frac{S_n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge presque sûrement vers 0 , c'est-à-dire qu'il existe un événement négligeable $\mathcal{Z}\in\mathcal{A}$ tel que

$$\forall\omega\in\Omega\backslash\mathcal{Z},\quad \frac{S_n(\omega)}{n}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$$

Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on pose

$$U_n=\left(\frac{S_n}{n}\right)^4\qquad\text{et}\qquad z_n=\left\{\omega\in\Omega,\exists k\geqslant n,U_k(\omega)\geqslant\frac{1}{\sqrt{k}}\right\}$$

II.B.1) Montrer que $E\left(S_n^4\right)=3n^2-2n$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.

II.B.2) Montrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}^*, P\left(U_n\geqslant\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\leqslant\frac{3}{n^{3/2}}$.

II.B.3) Montrer que $\mathcal{Z}_n\in\mathcal{A}$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ et que $\lim_{n\to\infty}P\left(\mathcal{Z}_n\right)=0$.

II.B.4) En considérant $\mathcal{Z}=\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*}z_n$, montrer que $\left(\frac{S_n}{n}\right)$ converge presque sûrement vers 0 .

III D'autres sommes aléatoires

On conserve la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de la partie précédente et on considère de plus une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de réels positifs ou nuls. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on pose

$T_n = \sum_{k=1}^n a_k X_k$.
III. A - Étude de $E(|T_n|)$
III.A.1) Montrer que la suite $(E(|T_n|))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.
III.A.2) Montrer que si la série $\sum a_n^2$ est convergente, alors la suite $(E(|T_n|))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente.
III.A.3) On suppose $a_1 \geqslant a_2 + \cdots + a_n$. Montrer $E(|T_n|) = E(|T_1|) = a_1$.

III.B - Application à une suite d'intégrales

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit

$$J_n = \int_0^{\infty} \frac{1-\cos(t)\cos\left(\frac{t}{3}\right)\cdots\cos\left(\frac{t}{2n-1}\right)}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

III.B.1) Montrer que $(J_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite bien définie et qu'elle est croissante et convergente.

On posera $a_k = \frac{1}{2k-1}$ et on exprimera l'espérance de $|T_n|$ avec la méthode de la question II.A.4.
III.B.2) Montrer que $J_n = \frac{\pi}{2}$ pour $1 \leqslant n \leqslant 7$ et que $(J_n)_{n\geqslant 7}$ est strictement croissante.
Solution du concours :

I Suites et intégrales

I.A- ϕ est continue sur $]0,+\infty[$, prolongeable par continuité en 0 (fausse singularité en ce point avec DL) donc intégrable sur $]0,1]$ et $\forall t \in [1,+\infty[\ \ 0 \leq \phi(t) \leq \frac{2}{t^2}$, donc ϕ est intégrable sur $[1,+\infty[$, alors ϕ est intégrable sur $]0,+\infty[$.
I.A.0)
I.A.1) $\forall x \in [0,+\infty[,\ \ t \longmapsto \frac{1-\cos t}{t^2}e^{-xt}$ est continue sur $]0,+\infty[$.
$\forall t \in]0,+\infty[,\ \ x \longmapsto \frac{1-\cos t}{t^2}e^{-xt}$ est continue sur $[0,+\infty[$.
$\forall x \in [0,+\infty[,\ \ \forall t \in]0,+\infty[\ \ \ 0 \leq \frac{1-\cos t}{t^2}e^{-xt} \leq \frac{1-\cos t}{t^2} = \phi(t)$.
La question précédente nous assure de la domination requise pour appliquer le théorème de continuité sous le signe intégral.

Alors f est continue sur $[0,+\infty[$.
On utilise le théorème de dérivation sous le signe intégral.

$\forall x \in [0,+\infty[,\ \ t \longmapsto \frac{1-\cos t}{t^2}e^{-xt}$ est continue et intégrable (majorée en valeur absolue par φ) sur $]0,+\infty[$.
$\forall t \in]0,+\infty[,\ \ x \longmapsto \frac{1-\cos t}{t^2}e^{-xt}$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0,+\infty[$.
$\forall t \in]0,+\infty[,\ \ \forall x \in]0,+\infty[,\ \ \frac{\partial}{\partial x}\frac{1-\cos t}{t^2}e^{-xt} = \frac{-(1-\cos t)}{t}e^{-xt}$ et $\frac{\partial^2}{\partial^2 x}\frac{1-\cos t}{t^2}e^{-xt} = (1-\cos t)e^{-xt}$.

$\forall x \in]0,+\infty[,\ t \longmapsto \frac{-(1-\cos t)}{t}e^{-xt}$ est continue et intégrable (prolongeable en 0 majorée par $2e^{-xt}$ sur $[1,+\infty[$) sur $]0,+\infty[$.
$\forall x \in]0,+\infty[,\ \ t \longmapsto (1-\cos t)e^{-xt}$ est continue sur $]0,+\infty[$.
$\forall a > 0,\ \ \forall x \in [a,+\infty[\forall t \in]0,+\infty[,\ \ |(1-\cos t)e^{-xt}| \leq 2e^{-at}$ et $t \longmapsto e^{-at}$ est continue et intégrable sur $]0,+\infty[$.
Donc $\underline{f \text{ est de classe } \mathcal{C}^2 \text{ sur }]0,+\infty[}$ et $\forall x \in]0,+\infty[,\ \ f'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{-(1-\cos t)}{t}e^{-xt}dt$, et : $f''(x) = \int_0^{+\infty}(1-\cos t)e^{-xt}dt$.

I.A.2) Les applications $t \longmapsto \frac{(1-\cos t)}{t^2}$ et $t \longmapsto \frac{(1-\cos t)}{t}$ sont bornées sur $]0,+\infty[$ (prolongeable en 0 et majorées par 2 sur $[1,+\infty[$), donc $\exists M > 0,\ \forall x \in]0,+\infty[,\ \ |f(x)| \leq M\int_0^{+\infty} e^{-xt}dt = \frac{M}{x}$ et $|f'(x)| \leq M\int_0^{+\infty} e^{-xt}dt = \frac{M}{x}$. Alors $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0$.

IA.3) On peut écrire $\forall x > 0,\ \ \ f''(x) = \frac{1}{x} - \mathrm{Re}\int_0^{+\infty} e^{(i-x)t}dt = \frac{1}{x} - \mathrm{Re}\frac{1}{x-i} = \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1}$.
Donc $\exists c \in \mathbb{R},\ \ \forall x > 0,\ \ f'(x) = \ln\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + c$, or $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0$, alors $c = 0$ et $\forall x > 0,\ \ f'(x) = \ln\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \ln x - \frac{1}{2}\ln(x^2+1)$.

I.A.4) D'après la question précédente l'application $x \longmapsto f(x) - [x\ln x - \frac{1}{2}x\ln(x^2+1) - \arctan(x)]$ est dérivable de dérivée 0 sur $]0,+\infty[$, donc constante.
Or pour x assez grand on a : $\ x\ln x - \frac{1}{2}x\ln(x^2+1) = -\frac{x}{2}\ln(1+\frac{1}{x^2}) = \frac{-1}{2x} + O(\frac{1}{x})$ qui tend vers 0 en $+\infty$ et $\lim_{x\to+\infty}\arctan(x) = \frac{\pi}{2}$, or $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$, donc $\forall x > 0,\ \ \ f(x) = x\ln x - \frac{1}{2}x\ln(x^2+1) - \arctan(x) - \frac{\pi}{2}$ et $f(0) = \frac{\pi}{2}$ car continue sur $[0,+\infty[$.

I.A.5) L'égalité est valable en 0.
Si $s > 0$, le changement de variable $st = u$ donne $\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos(st)}{t^2}dt = s\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos(u)}{u^2}dt = sf(0) = s\frac{\pi}{2}$ et l'égalité est vrai pour $s > 0$, cos est paire donc l'égalité est encore vraie pour $s < 0$.

I.B- I.B.1) L'application $t \longmapsto \frac{1-(\cos t)^n}{t^2}$ est continue sur $]0,+\infty[$.
$\forall t \geq 1,\ \ \frac{|1-(\cos t)^n|}{t^2} \leq \frac{2}{t^2}$. Au voisinage de 0 on a $(\cos t)^n = (1 - \frac{t^2}{2} + o(t^2))^n = 1 - n\frac{t^2}{2} + o(t^2)$, donc $\lim_{t\to 0}\frac{1-(\cos t)^n}{t^2} = \frac{n}{2}$, alors l'application $t \longmapsto \frac{1-(\cos t)^n}{t^2}$ est prolongeable en 0 donc intégrable sur $]0,1]$: La suite est bien définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
On a : $\forall t \in \mathbb{R},\ \ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ \ (\cos^2(t))^{n+1} \leq (\cos^2(t))^n$, donc la suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.

I.B.2) $u_1 = f(0) = \frac{\pi}{2}$. On a $1-\cos^2 t = \sin^2 t = \frac{1-\cos(2t)}{2}$, alors $u_2 = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos(2t)}{t^2} = \frac{\pi}{2}$ en utilisant la question $I.A.5$).

I.C- I.C.1) Le changement de variable suivant $\sqrt{\frac{2u}{n}} = t$ donne $u_n = \frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{n}}v_n$, où $v_n = \int_0^{+\infty}\frac{1-\left(\cos\left(\sqrt{2u/n}\right)\right)^n}{u\sqrt{u}}du$.

I.C.2) Soit $g(u) = \left(\cos\sqrt{\frac{2u}{n}}\right)^n$; $g'(u) = -n\left(\cos\sqrt{\frac{2u}{n}}\right)^{n-1}\sin\sqrt{\frac{2u}{n}}.\sqrt{\frac{2}{n}}.\frac{1}{2\sqrt{u}}$.
Soit $u > 0$, du théorème des accroissements finis appliqué à g qui est continue sur $[0,u]$ et dérivable sur $]0,u[$, $\exists\zeta \in]0,u[$ tel que $\frac{g(0)-g(u)}{-u} =$

$g'(\zeta)$, alors :

$$|1-\left(\cos\sqrt{2u/n}\right)^n| \leq u\left(n\sqrt{\frac{2}{n}}\sqrt{\frac{2\zeta}{n}}\frac{1}{2\sqrt{\zeta}}\right) = u$$

I.C.3) Pour n assez grand, $\left[\cos\left(\sqrt{\frac{2u}{n}}\right)\right]^n = e^{n\ln(1-\frac{2u}{2n}+o(\frac{1}{n}))} = e^{-u+o(1)}$ qui tend vers e^{-u} quand $n \to +\infty$.

Si on pose $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall u > 0$ $f_n(u) = \frac{1-\left(\cos\left(\sqrt{2u/n}\right)\right)^n}{u\sqrt{u}}$,
$\forall n \in \mathbb{N}^*, f_n$ est continue sur $]0,+\infty[$.
la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ converge simplement vers $u \longmapsto \frac{1-e^{-u}}{u\sqrt{u}}$ qui est continue sur $]0,+\infty[$.
$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall u \in]0,1[$; $|f_n(u)| \leq \frac{1}{\sqrt{u}}$ question précédente.
$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall u \in [1,+\infty[$; $|f_n(u)| \leq \frac{2}{u\sqrt{u}}$.
Soit φ définie par $\varphi(u) = \frac{2}{u\sqrt{u}}$ sur $[1,+\infty[$, et $\varphi(u) = \frac{1}{\sqrt{u}}$ sur $]0,1[$, φ est continue sur $]0,1[$ et sur $]1,+\infty[$ admet des limites finies en 1 à gauche et à droite, donc continues par morceaux et intégrable sur $]0,+\infty[$.
Le théorème de la convergence dominée s'applique et on a :
$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty} f_n(t)dt = \int_0^{+\infty}\frac{1-e^{-u}}{u\sqrt{u}}du = \ell$.
Alors $\lim_{n\to+\infty} v_n = \ell = \int_0^{+\infty}\frac{1-e^{-u}}{u\sqrt{u}}du$.

I.C.4) $\ell \neq 0$, donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{2}}\ell$.

$(\sqrt{u})' = \frac{1}{2\sqrt{u}}$, par une intégration par parties, on obtient $\frac{1}{2}\ell = \left[\frac{1-e^{-u}}{u}\sqrt{u}\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty}\frac{e^{-u}}{u} + \int_0^{+\infty}\frac{1-e^{-u}}{u^2}\sqrt{u}du$
Donc $\frac{\ell}{2} = -\sqrt{\pi}+\ell$, alors $\ell = 2\sqrt{\pi}$, donc $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{n\pi}{2}}$.

II Autour du pile ou face

II.A- II.A.1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $E(X_n) = 1.P(X_n = 1)+(-1)P(X_n = -1) = 0$, donc $E(S_n) = 0$.
$E(X_n^2) = 1^2.P(X_n = 1) + (-1)^2.P(X_n = -1) = 1$ Propriété de Transfert.
$V(S_n) = E[(S_n - E(S_n))^2] = E(S_n)^2 = E(\sum_{1\leq i,j\leq n} X_iX_j) = 2\sum_{1\leq i<j\leq n} E(X_i)E(X_j) + \sum_{i=1}^n E(X_i^2)$ car les X_i mutuellement indépendantes. Donc $V(S_n) = n$.

II.A.2) Supposons que $T(\Omega) = \{x_i \quad \backslash i \in I\}$, avec I fini, alors $T(\Omega) = -T(\Omega)$ et $E(\sin T) = \sum_{i\in I}\sin(x_i)P(T = x_i) = \sum_{i\in I}\sin(x_i)P(-T = x_i)$ car T et $-T$ ont même loi.
Alors $E(\sin T) = \sum_{i\in I}\sin(x_i)P(T = x_i) = -\sum_{i\in I}\sin(-x_i)P(T = -x_i) = -E(\sin T)$, donc $E(\sin T) = 0$.
Alors $E(\cos(S+T)) = E(\cos S\cos T) - E(\sin S\sin T)$, les variables

S et T sont indépendantes, donc les variables $\cos S$ et $\cos T$ sont indépendantes aussi $\sin S$ et $\sin T$.
Alors $E(\cos(S+T)) = E(\cos S)E(\cos T) - E(\sin S)E(\sin T) = E(\cos S)E(\cos T)$.

II.A.3) $tX_1(\Omega) = \{-t, t\}$, donc $\phi_1(t) = E(\cos(X_1 t)) = \cos(t)P(X_1 t = t) + \cos(-t)P(X_1 t = -t) = \cos(t)$ et l'égalité est vraie pour $n = 1$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $n \geq 2$, supposons qu'elle est vraie à l'ordre $n-1$, alors $\phi_n(t) = E(\cos(S_n t)) = E(\cos(S_{n-1}t + X_n t)) = E(\cos(S_{n-1}t))E(\cos(X_n t))$ question précédente, car les variables $S_{n-1}t$ et $X_n t$ sont indépendantes et $X_n t$ et $-X_n t$ ont même loi.
Alors $\phi_n(t) = E(\cos(S_n t)) = E(\cos(S_{n-1}t + X_n t)) = E(\cos(S_{n-1}t))E(\cos(X_n t)) = (\cos t)^{n-1}\cos(t) = (\cos t)^{n-1}$, la récurrence s'applique et l'égalité est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

II.A.4) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, posons $S_n(\Omega) = \{x_i \ /i \in I\}$ avec I fini, $E(|S_n|) = \sum_{k \in I} |x_k| P(S_n = x_k)$. Par application de la question $I.A.5)$ à $|x_k|$, on obtient :

$$\begin{aligned}
E(|S_n|) &= \sum_{k \in I} \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(x_k t)}{t^2} dt P(S_n = x_k) \\
&= \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\sum_{k \in I} P(S_n = x_k) - \sum_{k \in I} \cos(x_k t) P(S_n = x_k)}{t^2} dt \\
&= \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{1 - E(\cos(S_n t))}{t^2} dt \quad \text{propriété de Transfert} \\
&= \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{1 - (\cos t)^n}{t^2} dt \quad \text{question précédente} \\
&= \frac{2}{\pi} u_n
\end{aligned}$$

II.A.5) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a $S_{2n+2}(\Omega) = \{2p / \ -n-1 \leq p \leq n+1\} = \left\{\sum_{k=1}^{2n+2} \varepsilon_k \ /\varepsilon_1, ..., \varepsilon_{2n+2} \in \{-1, 1\}\right\}$; et $S_{2n+1}(\Omega) = \{2p+1 / \ -n-1 \leq p \leq n\} = \left\{\sum_{k=1}^{2n+1} \varepsilon_k \ /\varepsilon_1, ..., \varepsilon_{2n+1} \in \{-1, 1\}\right\}$, on remarque que le 0 ne figure pas dans $S_{2n+1}(\Omega)$.

$$E(|S_{2n+2}|) = \sum_{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{2n+2} \in \{-1,1\}} |\sum_{k=1}^{2n+2} \varepsilon_k| P(X_1 = \varepsilon_1, ..., X_{2n+2} = \varepsilon_{2n+2})$$

Or les variables X_k sont mutuellement indépendantes, donc :
$P(X_1 = \varepsilon_1, ..., X_{2n+2} = \varepsilon_{2n+2}) = \frac{1}{2^{2n+2}}$.

$$
\begin{aligned}
E(|S_{2n+2}|) &= \frac{1}{2^{2n+2}} \sum_{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_{2n+2}\in\{-1,1\}} |\sum_{k=1}^{2n+2} \varepsilon_k| \\
&= \frac{1}{2^{2n+2}} \sum_{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_{2n+1}\in\{-1,1\}} \left(|\sum_{k=1}^{2n+1} \varepsilon_k + 1| + |\sum_{k=1}^{2n+1} \varepsilon_k - 1| \right)
\end{aligned}
$$

Or $\sum_{k=1}^{2n+1} \varepsilon_k \neq 0$, car $2n+1$ est impair ; donc :
$\left(|\sum_{k=1}^{2n+1} \varepsilon_k + 1| + |\sum_{k=1}^{2n+1} \varepsilon_k - 1| \right) = \begin{cases} -2\sum_{k=1}^{2n+1} \varepsilon_k & \text{si} \quad \sum_{k=1}^{2n+1} \varepsilon_k \leq -1 \\ 2\sum_{k=1}^{2n+1} \varepsilon_k & \text{si} \quad \sum_{k=1}^{2n+1} \varepsilon_k \geq 1 \end{cases} =$
$2|\sum_{k=1}^{2n+1} \varepsilon_k|$
Donc

$$
\begin{aligned}
E(|S_{2n+2}|) &= \frac{2}{2^{2n+2}} \sum_{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_{2n+1}\in\{-1,1\}} |\sum_{k=1}^{2n+1} \varepsilon_k| \\
&= \frac{1}{2^{2n+1}} \sum_{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_{2n+1}\in\{-1,1\}} |\sum_{k=1}^{2n+1} \varepsilon_k| \\
&= E(|S_{2n+1}|)
\end{aligned}
$$

Donc $u_{2n+2} = u_{2n+1}$.

I.B- II.B.1) $E(S_n^4) = E\left((\sum_{k=1}^n X_k)^4\right) = E(\sum_{1\leq i,j,k,\ell\leq n} X_iX_jX_kX_\ell) = 2\sum_{1\leq i<j\leq n} E(X_i^2)E(X_j^2) + \sum_{i=1}^n E(X_i^4)$, car : $E(X_iX_jX_kX_\ell) = 0$ si l'un des indices n'appartient pas à l'ensemble des autres indices.
Alors $E(S_n^4) = 2A_4^2\frac{n^2-n}{2} + n = \binom{4}{2}\frac{n^2-n}{2} + n = 3(n^2-n)+n = 3n^2-2n$.

II.B.2) L'inégalité de Markov s'applique puisque $U_n \geq 0$, alors :

$$
P\left(U_n \geq \frac{1}{n}\right) \leq \sqrt{n}E(U_n) \leq \frac{3n^2-2n}{n^4}\sqrt{n} \leq \frac{3}{n^{3/2}}
$$

II.B.3) $\forall k \in \mathbb{N}^*, \left(U_k \geq \frac{1}{\sqrt{k}}\right)$ est un événement, donc $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathcal{Z}_n = \bigcup_{k\geq n}\left(U_k \geq \frac{1}{\sqrt{k}}\right)$ est un événement comme réunion dénombrable d'événements.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$

$$
\begin{aligned}
0 \leq P(\mathcal{Z}_n) &= P\left(\bigcup_{k\geq n}\left(U_k \geq \frac{1}{\sqrt{k}}\right)\right) \\
&\leq \sum_{k=n}^{+\infty} P\left(\left(U_k \geq \frac{1}{\sqrt{k}}\right)\right) \\
&= \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{3}{k^{3/2}}
\end{aligned}
$$

Or $\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{3}{k^{3/2}}$ est le reste d'une série convergente, donc $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{3}{k^{3/2}} = 0$, alors $\lim_{n\to+\infty} P(\mathcal{Z}_n) = 0$.

II.B.4) La suite $(P(\mathcal{Z}_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante, donc $P(\mathcal{Z}) = \lim_{n\to+\infty} P(\mathcal{Z}_n) = 0$, soit $\omega \in \mathcal{Z}$:

$$\begin{aligned}
\omega \notin \mathcal{Z} &\implies \omega \in \bigcup_{n\in^*} \overline{\mathcal{Z}_n} \\
&\implies \exists n_0 \in^*;\ \ \omega \notin \mathcal{Z}_{n_0} \\
&\implies \exists n_0 \in^*;\ \forall k \geq n_0;\ \ 0 \leq U_k(\omega) < \frac{1}{\sqrt{k}}
\end{aligned}$$

Alors : $\lim_{k\to+\infty} U_k(\omega) = 0$, donc $\lim_{n\to+\infty} \frac{S_n(\omega)}{n} = 0$.

III D'autres sommes aléatoires

III.A- III.A.1) On a :

$E(|T_{n+1}|) = \sum_{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_{n+1}\in\{-1,1\}} |\sum_{k=1}^{n+1} \varepsilon_k a_k| P(X_1 = \varepsilon_1, X_2 = \varepsilon_2, \dots, X_{n+1} = \varepsilon_{n+1})$.

Les variables sont mutuellement indépendantes, alors $P(X_1 = \varepsilon_1, X_2 = \varepsilon_2, \dots, X_{n+1} = \varepsilon_{n+1}) = \frac{1}{2^{n+1}}$, par conséquent :

$$\begin{aligned}
E(|T_{n+1}|) &= \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_{n+1}\in\{-1,1\}} |\sum_{k=1}^{n+1} \varepsilon_k a_k| \\
&= \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_{n}\in\{-1,1\}} \left(|\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k a_k + a_{n+1}| + |\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k a_k - a_{n+1}| \right)
\end{aligned}$$

Or $\forall a, b \in \mathbb{R}, \quad 2|a| = |a+b+a-b| \leq |a+b| + |a-b|$. Avec $a = \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k a_k$ et $b = a_{n+1}$, on obtient :

$E(|T_{n+1}|) \geq \frac{2}{2^{n+1}} \sum_{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n\in\{-1,1\}} |\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k a_k| \geq \frac{1}{2^n} \sum_{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n\in\{-1,1\}} |\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k a_k| = E(|T_n|)$.

Donc la suite $(E(|T_n|)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.

Remarque : La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.

III.A.2) $|T_n|^2 = \left[\sum_{k=1}^{n} a_k X_k\right]^2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_i X_i a_j X_j$.

Donc $E(|T_n|^2) = \sum_{k=1}^{n} a_k^2 E(X_k^2) + \sum_{1\leq i\neq j\leq n} a_i a_j E(X_i) E(X_j) = \sum_{k=1}^{n} a_k^2$.

Avec Cauchy-Schwarz :

$(E(|T_n|))^2 \leq E(|T_n|^2) = \sum_{k=1}^{n} a_k^2$, alors $E(|T_n|) \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2}$:

La série $\sum_{k\geq1} a_k^2$ est convergente, donc $\sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2} \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{+\infty} a_k^2}$, alors la suite $(E(|T_n|))_n$ qui est croissante et bornée est convergente.

III.A.3) Soit $n \geq 2$. On a

$$\begin{aligned} E(|T_n|) &= \frac{1}{2^n} \sum_{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n \in \{-1,1\}} |\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k a_k| \\ &= \frac{1}{2^n} \sum_{\varepsilon_2,\dots,\varepsilon_n \in \{-1,1\}} \left(|a_1 + \sum_{k=2}^{n} \varepsilon_k a_k| + |a_1 - \sum_{k=2}^{n} \varepsilon_k a_k| \right) \end{aligned}$$

Or $-a_1 \leq \sum_{k=2}^{n} -a_k \leq \sum_{k=2}^{n} \varepsilon_k a_k \leq \sum_{k=2}^{n} a_k \leq a_1$, donc :
$|a_1 + \sum_{k=2}^{n} \varepsilon_k a_k| + |a_1 - \sum_{k=2}^{n} \varepsilon_k a_k| = 2a_1$, donc :

$$\begin{aligned} E(|T_n|) &= \frac{1}{2^n} \sum_{\varepsilon_2,\dots\varepsilon_n \in \{-1,1\}} 2a_1 \\ &= a_1 \\ &= E(|T_1|) \end{aligned}$$

Donc $\forall n \geq 1, \quad E(|T_n|) = E(|T_1|) = a_1$.

III.B- III.B.1) $\forall k \in \mathbb{N}^*, a_k \geq 0$. Posons $T_n(\Omega) = \{x_i \ / i \in I\}$ avec I fini, alors

$$\begin{aligned} E(|T_n|) &= \sum_{k \in \ I} |x_k| P(T_n = x_k) \\ &= \sum_{k \in \ I} \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(x_k t)}{t^2} dt P(T_n = x_k) \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\sum_{k \in I} P(T_n = x_k) - \sum_{k \in I} \cos(x_k t) P(T_n = x_k)}{t^2} dt \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{1 - E(\cos(T_n t))}{t^2} dt \end{aligned}$$

En effet : La suite $(a_k X_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes, à valeurs dans $\{-a_k, a_k\}$ et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $P(a_k X_k = a_k) = P(a_k X_k = -a_k) = \frac{1}{2}$.
On peut appliquer les résultats de la partie $II.A$ avec $\varphi(t) = \prod_{k=1}^{n} (\cos a_k t)$ alors :
$E(|T_n|) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{1 - E(\cos(T_n t))}{t^2} dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{1 - \prod_{k=1}^{n} (\cos a_k t)}{t^2} dt = \frac{2}{\pi} J_n$.
De la question $III.A1)$; $(E(|T_n|))_{n \in \mathbb{N}^*}$ croissante, donc $(J_n)_{n \in^*}$ est bien définie, croissante.
La série $\sum_{k \geq 1} a_k^2$ et convergente, donc $(E(|T_n|))_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente (Question $I\bar{I}I.A.2$), donc $(J_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente.

III.B.2) $J_1 = \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(t)}{t^2} dt = u_1 = \frac{\pi}{2}$. On a $a_1 = 1$ et $a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 \simeq 0.95$, donc $\forall n \in \{2, ..., 7\}, \quad a_1 \geq \sum_{k=2}^{n} a_k$, d'après la question $III.A.3)$, $\forall n \in \{1, ..., 7\}, \quad E(|T_n|) = E(|T_1|)$, ce qui se traduit par : $\forall n \in \{1, ..., 7\}, \quad J_n = J_1 = \frac{\pi}{2}$.

$(J_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante. Reste à montrer qu'elle est strictement croissante à partir de 7.