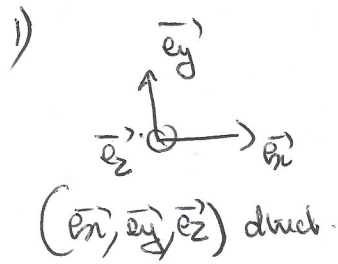


Partie 1 : Spectrométrie de masse.



$$\vec{B} = B_0 \vec{e}_z$$

Particule  $q>0$  de masse  $m$

$$\vec{a} \text{ à } t=0 \mid x=y=z=0 \\ \dot{x} = v_0 \quad \dot{y}=0; \quad \dot{z}=0$$

$$\begin{aligned} (\vec{F}_m)_{t=0} &= q \vec{v}_0 \wedge \vec{B} \\ &= q v_0 \vec{e}_x \wedge B_0 \vec{e}_z \\ &= q v_0 B_0 \vec{e}_y \end{aligned}$$

La particule est donc  
dans  $y < 0$ .

$$\underline{t > 0} \quad m \vec{a} = q \vec{v} \wedge \vec{B} \quad (1)$$

$$\vec{O\vec{N}} = x \vec{e}_x + y \vec{e}_y + z \vec{e}_z$$

avec  $z=0$  car à  $t=0$   $\vec{v}_0$  et  $\vec{F}_m$  ds le  
plan  $(x; y)$ .

$$\vec{v} = \dot{x} \vec{e}_x + \dot{y} \vec{e}_y$$

$$\vec{a} = \ddot{x} \vec{e}_x + \ddot{y} \vec{e}_y$$

$$q \vec{v} \wedge \vec{B} = q \begin{vmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ 0 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ B_0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} q \dot{y} B_0 \\ -q \dot{x} B_0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

d'eq (1) projeté suivant  $\vec{e}_x$  et  $\vec{e}_y$   
donne :

$$m \ddot{x} = q \dot{y} B_0$$

$$m \ddot{y} = -q \dot{x} B_0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \ddot{x} = \frac{q B_0}{m} \dot{y} \quad (1) \\ \ddot{y} = -\frac{q B_0}{m} \dot{x} \quad (2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{v}_x = \omega_c v_y \\ \dot{v}_y = -\omega_c v_x \end{cases}$$

Dimension de  $\frac{q B_0}{m}$  :

$$F = q v \wedge B = m a \Rightarrow \left[ \frac{q B}{m} \right] = \left[ \frac{a}{v} \right] = \frac{L T^{-2}}{L T^{-1}} = T^{-1}$$

2)  $\underline{v} = v_x + j v_y$

(2) + j(1)  $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \underline{\dot{v}} = -j \omega_c \underline{v}$$

$$\Rightarrow \underline{v}(t) = A e^{-j \omega_c t}$$

A : constante  
d'intégration

à  $t=0$   $\underline{v} = v_0 \Rightarrow$

$$\underline{v}(t) = v_0 e^{-j \omega_c t}$$

3)  $\underline{v}(t) = \frac{d\underline{R}}{dt} \Rightarrow \underline{R}(t) = -\frac{v_0}{j \omega_c} e^{-j \omega_c t} + cte = j \frac{v_0}{\omega_c} e^{-j \omega_c t} + cte$

à  $t=0$   $0 = j \frac{v_0}{\omega_c} + cte \Rightarrow cte = -j \frac{v_0}{\omega_c}$

$$R(t) = \frac{1}{\omega_c} \left( e^{-j\omega_c t} - 1 \right)$$

$$3) \Rightarrow R(t) = \frac{1}{\omega_c} \left( \cos \omega_c t - j \sin \omega_c t - 1 \right) = \frac{V_0}{\omega_c} \sin \omega_c t + j \frac{V_0}{\omega_c} (\cos \omega_c t - 1)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x(t) = \frac{V_0}{\omega_c} \sin \omega_c t \\ y(t) = \frac{V_0}{\omega_c} (\cos \omega_c t - 1) \end{cases}$$

$$\text{or } \sin^2 \omega_c t + \cos^2 \omega_c t = 1 \Rightarrow \left( \frac{x}{\frac{V_0}{\omega_c}} \right)^2 + \left( \frac{y+1}{\frac{V_0}{\omega_c}} \right)^2 = 1$$

$$\Rightarrow \left[ x^2 + \left( y + \frac{V_0}{\omega_c} \right)^2 = \left( \frac{V_0}{\omega_c} \right)^2 \right] \Rightarrow \text{cercle de centre } x_c = 0 \text{ et de rayon } y_c = -\frac{V_0}{\omega_c} \quad R = \frac{V_0}{\omega_c}$$

$$4) \xrightarrow{U_{BA} = V_B - V_A} \text{TEN} \quad E_c(A) + E_p(A) = E_c(B) + E_p(B)$$

$$E_c(A) + q \cdot V_A = E_c(B) + q \cdot V_B$$

$$\Rightarrow E_c(B) - E_c(A) = q(V_A - V_B) = -q U_{BA} \quad (\text{avec } U_{BA} < 0)$$

$$5) \text{ Application: } d = 2R = \frac{2V_0 \cdot m}{q B_0} = \frac{2m v_0}{q B_0} \quad \text{les ions sont liés}$$

Suivant le produit mvo.

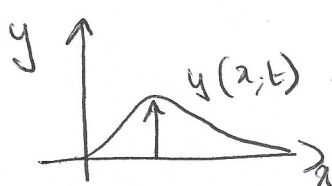
On pose le problème en accélérant les ions par une tension.

$$E_c(A) = 0 \rightarrow \frac{1}{2} m v_B^2 = -q \cdot U_{BA} \Rightarrow v_B = \sqrt{\frac{-2q U_{BA}}{m}} \quad \text{et}$$

$$d = 2R = \frac{2m v_B}{q B_0} = \frac{2m \sqrt{\frac{-2q U_{BA}}{m}}}{q B_0} = \frac{2}{B_0} \sqrt{-2 \frac{m}{q} U_{BA}} = d$$

$$d'oi \quad \frac{d_1}{d_2} = \sqrt{\frac{m_1}{m_2}}$$

## Partie 2 Onde de Nerve

$y$    $y(x,t)$  représente l'épuration de la corde  $\perp$  à la direction de propagation.

$$y_i(0,t) = a \cos \omega t$$

$$y_i(n,t) = y_i(0, t - \tau) \quad \text{et } \tau = \frac{x}{c}$$

d'où  $y_i(n,t) = a \cos(\omega t - kx)$  avec  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$

(2)

$$b) \quad c = +^\alpha \mu^\beta$$

$$[c] = L T^{-1}$$

$$[T] = [Frac] = M L T^{-2}$$

$$[\mu] = M L^{-1}$$

$$\left. \begin{array}{l} [c] = L T^{-1} \\ [T] = [Frac] = M L T^{-2} \\ [\mu] = M L^{-1} \end{array} \right\} \rightarrow \begin{array}{l} L T^{-1} = M^\alpha L^\alpha T^{-2\alpha} \cdot M^\beta L^{-\beta} T^{-2\alpha} \\ L T^{-1} = M^{\alpha+\beta} L^{\alpha-\beta} T^{-2\alpha} \end{array}$$

$$(1) \quad \alpha + \beta = 0$$

$$(2) \quad \alpha - \beta = -1$$

$$(3) \quad -2\alpha = -1 \Rightarrow \alpha = \frac{1}{2} \quad \text{d'où d'après } \beta = -\frac{1}{2}$$

$$R_q \quad (2) \text{ est bien vérifiée car } \alpha - \beta = \frac{1}{2} - (-\frac{1}{2}) = 1!$$

$$c = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

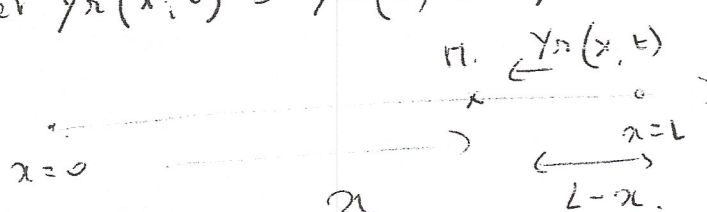
2] Au point  $x=L$ , la corde est fixée donc  $y(L; t) = 0$ .

avec  $y_i(L; t) + y_r(L; t) = 0 \Rightarrow y_i(L; t) = -y_r(L; t) \Rightarrow$  les deux cordes sont en opposition de phase.

$$y_i(x; t) = a \cos(\omega t - kx)$$

$$y_i(L; t) = a \cos(\omega t - kL) \Rightarrow y_r(L; t) = a \cos(\omega t - kL + \pi)$$

et  $y_r(x; t) = y_r(L; t - \tau)$  avec  $\tau$  le temps de propagation.

$$\tau = \frac{L-x}{c}$$


$$\text{d'où } y_r(L; t - \tau) = a \cos\left(\omega\left(t - \left(\frac{L-x}{c}\right)\right) - kL + \pi\right)$$

$$y_r(x; t) = a \cos\left(\omega t + kx - 2kL + \pi\right)$$

$$3] \quad y(x; t) = y_i(x; t) + y_r(x; t)$$

$$y(x,t) = a \cos(\omega t - kx) + a \cos(\omega t + kx - 2kL\pi)$$

$$= 2a \cos\left(\omega t - kL + \frac{\pi}{2}\right) \cos\left(kx - kL + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$y(x,t) = 2a \cos(\omega t + \varphi) \cos(kx + \Phi) \quad \text{avec} \quad A = 2a$$

$$\varphi = \Phi = \frac{\pi}{2} - kL$$

Onde sinusoïdale de pulsation  $\omega$  dont l'amplitude dépend de la position du point M.  $A(x) = 2a \cos(kx + \Phi)$ . L'échelle ne change pas, elle est stationnaire.

4] Les modes propres de la corde correspondent aux vibrations respectant les conditions aux limites  $A(0)=0$  et  $A(L)=0$  (corde fixée) qui conduisent à des ondes stationnaires stables. Ce qui entraîne des valeurs déterminées par  $k$  et donc par  $\lambda \Rightarrow$  ce sont les fréquences propres. Si  $f_{\text{fixée}} = f_{\text{propre}} \Rightarrow$  l'amplitude des vibrations est max.

5] Ventres = point N ou  $|A(x)| = 2a \rightarrow \cos(kx + \Phi) = \left(\frac{2n+1}{2}\right) N\pi$

$$kx_n + \Phi = N\pi \Rightarrow \text{distance entre 2 ventres} \cdot k(x_{n+1} - x_n) = \pi$$

$$\Delta x_n = \frac{\pi \cdot \lambda}{2\pi} = \frac{\lambda}{2}$$

Nœuds, point M ou  $A(x) = 0 \rightarrow kx_n + \Phi = \left(2n+1\right) \frac{\pi}{2}$

$$k \Delta x_n = \pi$$

$$\Delta x_n = \frac{\lambda}{2}$$

La distance entre un nœud et un ventre consécutifs =  $\frac{\lambda}{4}$

Les fréquences propres vérifient alors  $L = n \cdot \frac{\lambda_n}{2}$  puis les 2 5 ventres  
6 nœuds

distances et des nœuds  $\Rightarrow L = n \cdot \frac{c}{2f_n} \rightarrow f_n = n \cdot \frac{c}{2L}$  ↑

AN:  $L = 1m, m = 10g \Rightarrow \mu = \frac{m}{L} = 10 \cdot 10^{-3} g \cdot m^{-1}$  ↑

4  $T = 4m \quad \sqrt{\frac{F}{\mu}} \quad c = \sqrt{\frac{F}{\mu}} \quad f_n = 10 \text{ Hz} \quad f_{\text{fixée}} = 50 \text{ Hz}$

### Partie 3 Filtrage d'un signal expérimental.

$$V_{exp}(t) = V_0(1 + \alpha \cos \Omega t + \cos \varphi \Omega t) \text{ avec } \alpha = 1,5 \cdot 10^{-1}.$$

1- Filtrer passe bande avec  $\Omega \in \Delta\omega$  et  $\Delta\omega =$  bande passante du filtre.

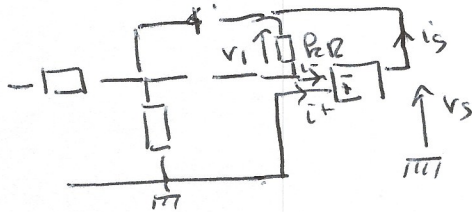
$$2- V_e(t) = A_e \cos \omega t \Rightarrow V_s(t) = A_s \cos(\omega t + \varphi).$$

$$\text{avec } \underline{V_e} = A_e \text{ et } \underline{V_s} = A_s e^{j\varphi}.$$

$$H(j\omega) = \frac{\underline{V_s}}{\underline{V_e}} = G(\omega) e^{j\varphi(\omega)} \Rightarrow \underline{V_s} = G(\omega) e^{j\varphi(\omega)} \cdot \underline{V_e}.$$

$$\Rightarrow A_s = G(\omega) \cdot A_e \text{ et } \varphi(\omega) = \varphi(\omega) \Rightarrow \underline{V_s(t)} = A_e G(\omega) \cos(\omega t + \varphi(\omega)).$$

3. BF  $\rightarrow$   $\checkmark$  - Le filtre à BF est équivalent à :

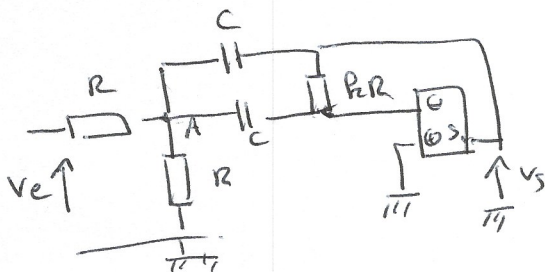


$$i_s = i^- = 0. \text{ donc } V_s = V^- \text{ car } V_i = 0.$$

$$\text{et } V^- = V^+ \Rightarrow \underline{V_s = 0} \text{ à BF.}$$

$$\text{HF. } \rightarrow \text{ -- } \Rightarrow V_s = V_A = V^+ = V^- = 0 \Rightarrow \underline{V_s = 0 \text{ à HF.}}$$

4] All idéal  $i^+ = i^- = 0$   ~~$V^+ = V^-$~~ ,  $R_e \rightarrow \infty$   $R_s \rightarrow 0$



$$\underline{V_s} = \frac{j\omega V_A + \frac{V_s}{R_R}}{\frac{j\omega}{R} + \frac{1}{R_R}} \quad (1)$$

$$V_A = \frac{\frac{V_e}{R} + 0 + j\omega V_s + j\omega V^-}{\frac{1}{R} + \frac{1}{R} + j\omega + j\omega} \quad (2)$$

ds (2) on remplace  $V^-$  par (1), on obtient une relation entre  $V_e$ ,  $V_A$  et  $V_s$ .

6] All linéaire  $\Rightarrow V^+ = V^-$  et  $V^+ = 0 \Rightarrow V^- = 0$

$$(1) \Rightarrow \underline{V_A} = \frac{-V_s}{jR_R\omega}$$

$$\text{et (2)} \Rightarrow V_A = \frac{V_e + jR\omega V_s}{2 + 2jR\omega}.$$

$$7) \text{ d'où } \frac{V_e + jR\omega V_s}{2 + 2jR\omega} = -\frac{V_s}{jR_R\omega} \Rightarrow \frac{V_e}{2 + 2jR\omega} = -\left[ \frac{jR\omega}{2 + 2jR\omega} + \frac{1}{jR_R\omega} \right] V_s$$

$$\frac{V_e}{2 + 2j\omega RC} = - \frac{[j\omega RC + 2 + 2j\omega RC] V_s}{(2 + 2j\omega RC)(j\omega RC)}$$

$$\underline{V_e} = - \left[ j\omega RC + \frac{2}{j\omega RC} + \frac{2}{R} \right] \underline{V_s}$$

$$\frac{V_s}{V_e} = \frac{-1}{\frac{2}{R} + j\omega RC + \frac{2}{j\omega RC}} = \frac{-\frac{R}{2}}{1 + j\frac{R}{2}\omega RC + \frac{1}{j\omega RC}} = \frac{H_0}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}$$

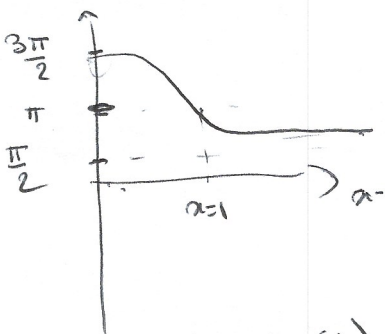
et  $\underline{a}$   $H_0 = -\frac{R}{2}$ . et  $\begin{cases} \frac{Q}{\omega_0} = \frac{R}{2} RC \\ Q\omega_0 = \frac{1}{RC} \end{cases} \Rightarrow Q = \frac{R}{2} \Rightarrow Q = \sqrt{\frac{R}{2}}$   
 $\omega_0 = \frac{1}{QR} \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{2}{R} \cdot \frac{1}{RC}}$

8]  $G_{dB} = 20 \log |H| = 20 \log \frac{|H_0|}{\sqrt{1 + Q^2 \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2}}$  On pose  $x = \frac{\omega}{\omega_0}$ .

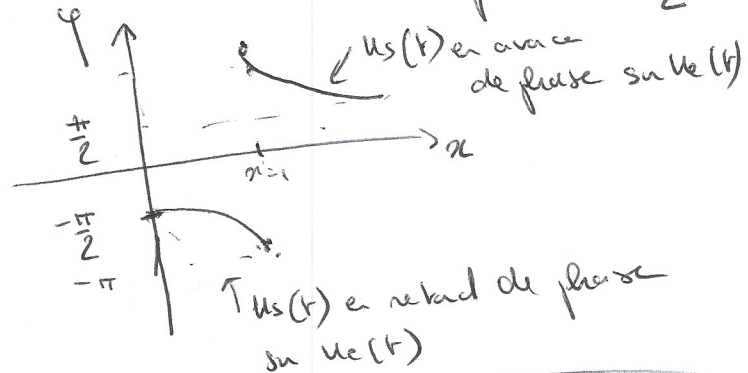
$$\varphi = \arg(H_0) - \arctan Q \left( x - \frac{1}{x} \right)$$

$H_0$  réel négatif  $\Rightarrow \varphi = \pi$ .  
 $\arg(H_0) = \pi$ .

$$\arctan \left( x - \frac{1}{x} \right) \begin{cases} x \rightarrow 0 & -\frac{\pi}{2} \\ x = 1 & 0 \\ x \rightarrow \infty & \frac{\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow \varphi \begin{cases} x \rightarrow 0 & \frac{3\pi}{2} \\ x = 1 & \pi \\ x \rightarrow \infty & \frac{\pi}{2} \end{cases}$$



ou. avance de phase de  $\frac{3\pi}{2}$  = retard de phase de  $-\frac{\pi}{2}$ .



$x=1$   $u_s(t)$  et  $u_e(t)$  en opposition de phase.

$u_s(t)$  en avance de phase sur  $u_e(t)$   
 $u_s(t)$  en retard de phase sur  $u_e(t)$

$$\underline{H} = \frac{H_0}{1 + jQ\left(x - \frac{1}{x}\right)}$$

$$x \rightarrow \infty \rightarrow \frac{H_0}{-jQ} = j \frac{H_0}{Q}$$

$$G_{dB} \rightarrow \gamma_{BF} = 20 \log \frac{|H_0|}{Q}$$

(6)

$$\underline{H} = \frac{H_0}{1+j\varphi(\lambda - \frac{1}{\lambda})} \xrightarrow{\lambda \rightarrow \infty} \frac{H_0}{j\varphi\lambda} = -j \frac{H_0}{\varphi \cdot \lambda} \quad \text{GdB} \rightarrow \gamma_{HF} = 20 \log \frac{|H_0|}{\varphi} - 20 \log \lambda$$

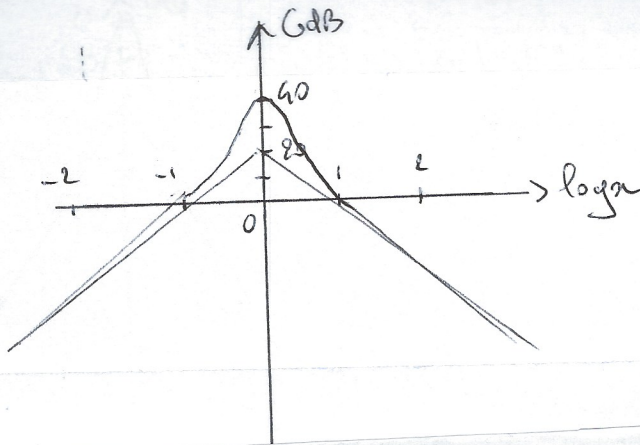
$$\underline{\lambda=1} \quad |\underline{H}| = H_0 \rightarrow (\text{GdB})_{\text{sup}} = 20 \log |H_0| \dots$$

$$\gamma_{BF} \text{ et } \gamma_{HF} : \text{Pai d'interaction } \lambda=1 \quad \gamma = 20 \log \frac{|H_0|}{\varphi}$$

$$10] \quad \varphi = 10 = \sqrt{\frac{2}{2}} \quad 20 \log \frac{|H_0|}{\varphi} = 20 \log |H_0| - 20 \log |\varphi| = (\text{GdB})_{\text{sup}} - 20 \text{ dB}$$

$$\Rightarrow R=200 \rightarrow H_0 = -100$$

Les asymptotes se croisent 20 dB en dessous de (GdB)<sub>sup</sub>.



$$\text{GdB} = 20 \log |H_0| = 20 \log 10^2 = 40 \text{ dB}$$

$$\gamma_F = 20 \log \frac{H_0}{\varphi} = 20 \log \frac{10}{10} = 0 \text{ dB}$$

$$11] \quad G_{dB}(\omega) = G_{dB}(\omega_c) = G_{\text{sup}} - 3 \text{ dB} \Leftrightarrow |H(\omega)| = |H(\omega_c)| = \frac{H_{\text{sup}}}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \frac{|H_0|}{\sqrt{1+\varphi^2(\lambda - \frac{1}{\lambda})^2}} = \frac{|H_0|}{\sqrt{2}} \rightarrow \lambda - \frac{1}{\lambda} = \pm \frac{1}{\varphi} \Rightarrow \lambda^2 \pm \frac{\lambda}{\varphi} - 1 = 0$$

$$\Delta = \frac{1}{\varphi^2} + 4 \rightarrow \lambda_2 = +\frac{1}{2\varphi} + \sqrt{1 + \frac{1}{\varphi^2}} \quad \lambda_1 = -\frac{1}{2\varphi} + \sqrt{1 + \frac{1}{\varphi^2}}$$

$$\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1 = \frac{1}{\varphi} = \frac{\Delta\omega}{\omega} \rightarrow \boxed{\varphi = \frac{\omega}{\Delta\omega}}$$

12] Thevenin de superposition

$$V_s(t) = V_0 \cdot |H(\omega=0)| + V_0 \cdot \alpha \cdot |H(2\omega)| \cos(\omega t + \varphi(\omega)) + V_0 \cdot |H(2\omega)| \cos(2\omega t + \varphi(2\omega))$$

$$13] \quad \omega_0 = \omega$$

$$14] \quad A_0 = 0 \rightarrow A_{2\omega} = \alpha |H_0| V_0 \quad A_{2\omega} = \frac{V_0 \cdot |H_0|}{\sqrt{1+2,25 \cdot 100}} \Rightarrow \frac{A_0}{A_{2\omega}} = 0 \quad \frac{A_{2\omega}}{A_{\omega}} = 9,44$$

Filtre ne convert pas car la composante de pulsation est 2\omega petite ne amplitude ne negligible

## Partie 4

Q1 Le signal est périodique ou sinusoidal  $\Rightarrow$  décomposition de Fourier en termes sinusoidaux donne les harmoniques.

Première fréquence  $\rightarrow$  fréquence fondamentale.

pics suivants  $\rightarrow$  fréquences harmoniques.

Q2 la fréquence du signal enregistré = fréquence fondamentale.

$$f = f_1 \approx 540 \text{ Hz.}$$

Q3 Emission d'un son parce l'onde interfère de façon constructive avec elle-même.

$$\Rightarrow \pi D = k\lambda = k \cdot \frac{c}{f} \rightarrow \boxed{c = f \cdot \pi \cdot D} \text{ avec } k=1$$

$$\text{AN } c = 540 \cdot \pi \cdot 12 \cdot 10^{-2} = 204 \text{ m.s}^{-1}.$$

Q4 Modes propres:  $f_1 \approx 540 \text{ Hz}$   $f_2 \approx 1080 \text{ Hz} \approx 2 \cdot f_1$   $f_3 \approx 1640 \text{ Hz} \approx 3 \cdot f_1$

$$f_4 \approx 2200 \text{ Hz} \approx 4 \cdot 540$$

Q5: Gain du microphone = 1

Q6: Amplitudes des harmoniques  $\downarrow$  avec le temps.  $\left\{ \begin{array}{l} \text{fréquence} \\ \text{harmoniques ne modifient} \end{array} \right.$  avec le son.



$$\vec{ON} = x \vec{e}_n = (x_0 + x) \vec{e}_n.$$

$$\vec{v} = \dot{x} \vec{e}_n$$

$$\vec{a} = \ddot{x} \vec{e}_n$$

$$\vec{T} = -k(x - x_0) \vec{e}_n = -kx \vec{e}_n.$$

$\Sigma \vec{F} = m\vec{a}$  projeté sur  $\vec{e}_n$ :

$$m\ddot{x} + kx = 0 \rightarrow \ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0.$$

$$\frac{k}{m} = \omega^2 \text{ et } \frac{\alpha}{m} = \frac{\omega}{Q} \Rightarrow \boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}} \quad Q = \frac{\omega_0 \cdot m}{\alpha} = \frac{\sqrt{k \cdot m}}{\alpha} = Q.$$

$\omega_0$  = pulsation propre = pulsation des oscillations sans amortissement

$Q = \frac{1}{2\lambda}$  et  $\lambda$  = facteur d'amortissement.

$$\begin{array}{c} \ddot{x} \\ \downarrow \\ L^{-1} \end{array} = \begin{array}{c} \omega_0 \\ \downarrow \\ T^{-1} \end{array} \begin{array}{c} x \\ \downarrow \\ T^{-1} \end{array} = \begin{array}{c} \omega_0^2 \\ \downarrow \\ L^{-1} \end{array} \begin{array}{c} x \\ \downarrow \\ L^{-1} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} [\omega_0] = T^{-1} \\ [Q] = 1 \end{array} \quad (1 \text{ s}^{-1})$$

(8)

faible  $\Rightarrow \zeta$  grand.

$$\ddot{x} + \frac{\omega_0}{\zeta} \dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad e^{it} \text{ solution} \Rightarrow \lambda^2 + \frac{\omega_0}{\zeta} \lambda + \omega_0^2 = 0$$

$$\Delta = \omega_0^2 \left[ \frac{1}{\zeta^2} - 4 \right] < 0 \text{ si } \zeta \text{ grand} \Rightarrow \text{regime pseudo periodique.}$$

$$\lambda = -\frac{\omega_0}{2\zeta} \pm i \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4\zeta^2}}$$

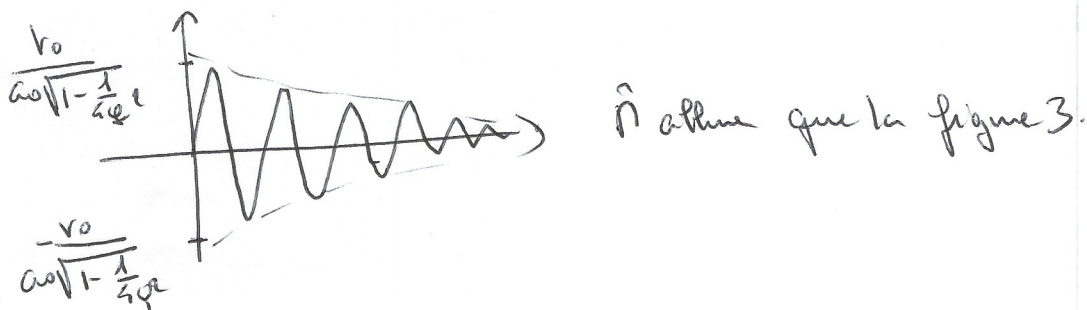
$$x(t) = A e^{-\frac{\omega_0}{2\zeta} t} \cos(\omega t + \varphi) \quad \text{à } t=0 \quad x=0 = A \cos \varphi \rightarrow \varphi = \pm \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow x(t) = A e^{-\frac{\omega_0}{2\zeta} t} \sin \omega t.$$

$$\dot{x} = A \left[ -\frac{\omega_0}{2\zeta} e^{-\frac{\omega_0}{2\zeta} t} \sin \omega t + \omega e^{-\frac{\omega_0}{2\zeta} t} \cos \omega t \right].$$

$$\text{à } t=0 \quad v_0 = A \omega \Rightarrow A = \frac{v_0}{\omega}.$$

$$x(t) = \frac{v_0}{\omega \sqrt{1 - \frac{1}{4\zeta^2}}} e^{-\frac{\omega_0}{2\zeta} t} \sin \omega \sqrt{1 - \frac{1}{4\zeta^2}} t.$$



L'amplitude du phénomène est divisé par 2 toutes les secondes.

$$1^{\text{o}} \text{ sup} \quad x_1 = x(t=1s) = x_m e^{-\frac{\omega_0}{2\zeta} t_1} = 1$$

$$2^{\text{o}} \text{ sup} \quad x_2 = x(t=2s) = x_m e^{-\frac{\omega_0}{2\zeta} t_2} = 2$$

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{1}{2} = e^{-\frac{\omega_0}{2\zeta} (t_2 - t_1)} \Rightarrow \ln 2 = \frac{\omega_0 \Delta t}{2\zeta} \Rightarrow \zeta = \frac{\omega_0 \Delta t}{2 \ln 2} = \frac{2490}{2 \ln 2} = \zeta$$

$$\zeta_{12}] \quad \zeta = 10. (2\zeta \text{ le regime permanent est atteint au bout de } 10\zeta \quad \zeta = \frac{2\zeta}{\omega_0} = \frac{\Delta t}{\ln 2} = 1,4s \quad (9)$$

# IIA. Approche Fréquentielle.

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = A_0 \cos(\omega t + \Phi). \quad (1)$$

en R.S.F  $x(t) = X \cos(\omega t + \varphi)$  avec  $x(t) = \underline{x} e^{j\omega t}$ .

13]  $\underline{x}$  : Amplitude complexe  $|\underline{x}| = X$   $\arg(\underline{x}) = \varphi$  car  $\underline{x} = X e^{j\varphi}$ .

14]  $x(t)$  vérifie la même équation différentielle que  $x(t)$  avec le second membre  $= A_0 e^{j\omega t}$   
 avec  $\frac{d^2 \underline{x}(t)}{dt^2} = (j\omega)^2 \underline{x}(t)$   $\frac{d \underline{x}(t)}{dt} = (j\omega) \underline{x}(t)$ .  
 $= A_0 e^{j\omega t}$

et on associe alors à (1)

$$\left[ (j\omega)^2 + \frac{\omega_0}{Q} j\omega + \omega_0^2 \right] \underline{x} e^{j\omega t} = A_0 e^{j\omega t} \Rightarrow \underline{x} = \frac{A_0}{(j\omega)^2 + \frac{\omega_0}{Q} j\omega + \omega_0^2}.$$

15]  $\underline{x} = \frac{A_0/\omega_0^2}{1 + j \frac{\omega}{Q} + (j \frac{\omega}{\omega_0})^2}$

On pose  $y = \frac{\omega}{\omega_0} \Rightarrow \underline{x} = \frac{A_0/\omega_0^2}{1 + j \frac{y}{Q} + (j y)^2}$ .

16]  $|\underline{x}| = \frac{A_0/\omega_0^2}{\sqrt{(1-y^2)^2 + \frac{y^2}{Q^2}}} = X$

$\frac{dX}{dy} = A_0/\omega_0^2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{d}{dy} \left( (1-y^2)^2 + \frac{y^2}{Q^2} \right) \cdot \left( (1-y^2)^2 + \frac{y^2}{Q^2} \right)^{-\frac{3}{2}}$   
 $= 0$  si  $\frac{d}{dy} \left( (1-y^2)^2 + \frac{y^2}{Q^2} \right) = 0$

Calcul de  $\frac{d}{dy} \left[ (1-y^2)^2 + \frac{y^2}{Q^2} \right] = 2 \cdot (-2y)(1-y^2) + \frac{2y}{Q^2} = 4y \left[ \frac{1}{2Q^2} - (1-y^2) \right] = 0$

$\Rightarrow \frac{1}{2Q^2} - 1 + y^2 = 0 \rightarrow y^2 = 1 - \frac{1}{2Q^2} \Rightarrow$

17).

$$\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$$

si  $Q > \frac{1}{\sqrt{2}} = Q_0$ .

18]  $Q \gg Q_0 \rightarrow \frac{1}{2Q^2} \ll 1 \Rightarrow \omega_r \simeq \omega_0$ .

et  $X_{\text{max}} = X(\omega_0) = \frac{A_0 \cdot Q}{\omega_0^2}$  car  $y=1$ .

