DM PCSI2

EXERCICE 1: Mouvement d'un satellite.

On étudie dans cette partie le mouvement du satellite, assimilé à un point matériel M, autour de la Terre de rayon $R_T = 6{,}4.10^3$ km et de centre O.

L'étude est réalisée dans le référentiel géocentrique $R_g(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ supposé galiléen au cours du temps noté t. L'ensemble des grandeurs vectorielles seront exprimées dans la base cylindro-polaire $(\vec{u_r}, \vec{u_\theta}, \vec{k})$. On suppose que la trajectoire du satellite de masse $m = 4{,}0.10^3$ kg est plane et se fait dans le plan $(O, \vec{i}, \vec{j})$ représenté sur la figure 2.

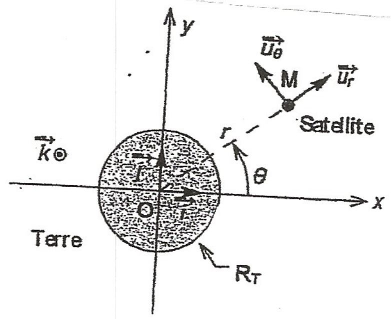


Figure 2

On rappelle que $\frac{d\vec{u_r}}{dt} = \dot{\theta}\vec{u_\theta}$ et $\frac{d\vec{u_\theta}}{dt} = -\dot{\theta}\vec{u_r}$ où $\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}$.

1.1 Préliminaires

1) La position du satellite est repérée par le point M de coordonnées $(r(t), \theta(t), z = 0)$. Déterminer l'expression du vecteur position $\overrightarrow{OM}$ et du vecteur vitesse $\vec{v_M}$ dans la base $(\vec{u_r}, \vec{u_\theta}, \vec{k})$ en fonction de r, θ et de leurs dérivées éventuelles.

2) On note $g_0 = 10\ m.s^{-2}$ la norme de l'accélération de pesanteur à la surface de la Terre. L'énergie potentielle $E_p(r)$ associée à l'interaction gravitationnelle $\vec{F}$ s'exprime sous la forme $E_p(r) = -g_0 m\frac{R_T^2}{r}$. En déduire l'expression de l'interaction $\vec{F}$ exercée par la Terre sur le satellite en fonction de g_0, m, R_T et r. L'interaction gravitationnelle est-elle attractive ou répulsive? Dans la suite, on supposera que le satellite est soumis uniquement à $\vec{F}$.

3) Soit $\vec{L_0} = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v_M}$. Comment s'appelle cette grandeur mécanique associée au satellite? Déterminer son expression dans la base $(\vec{u_r}, \vec{u_\theta}, \vec{k})$, puis sa norme L_0 en fonction de r, $\dot{\theta}$ et m. Montrer que le vecteur $\vec{L_0}$ est constant au cours du mouvement.

1.2 Mise en orbite circulaire du satellite

La mise en orbite terrestre d'un satellite se fait en deux étapes :

* phase balistique : le satellite s'éloigne de la Terre sur une ellipse de foyer le centre de la Terre jusqu'à l'apogée;
* phase de satellisation : la satellite accélère pour obtenir une trajectoire circulaire autour de la Terre.

On considère que le satellite est placé en orbite circulaire de rayon r constant autour de la Terre.

4) Exprimer pour cette trajectoire circulaire le vecteur vitesse $\vec{v_M}$ et le vecteur accélération $\vec{a_M}$ du satellite uniquement en fonction de la quantité $v = r\dot{\theta}$, de sa dérivée temporelle $\dot{v}$ et de r.

5) À l'aide du principe fondamental de la dynamique, montrer que le mouvement est uniforme et exprimer v^2 en fonction de g_0, R_T et r.

6) En déduire l'expression des énergies cinétique E_c et mécanique E_m du satellite en fonction de m, g_0, R_T et r. Justifier le signe de E_m.

7) Application numérique : calculer l'énergie mécanique du satellite pour une trajectoire circulaire de rayon $r_b = 8{,}0.10^3$ km, puis pour un rayon $r_h = 40.10^3$ km. Rappel : $64 = 2^6$.

1.3 Étude énergétique du satellite

On suppose ici que la trajectoire du satellite n'est pas nécessairement circulaire.

8) Montrer que l'énergie mécanique du satellite est constante au cours du mouvement et qu'elle se met sous la forme

$$E_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{L_0^2}{2mr^2} - g_0 m\frac{R_T^2}{r}.$$

9) On appelle énergie potentielle effective

$$E_{p,eff}(r) = E_m - \frac{1}{2}m\dot{r}^2.$$

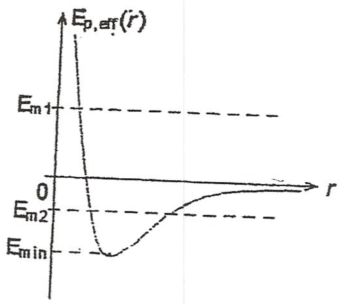


Figure 3 - Allure de l'énergie potentielle effective en fonction de r

Au cours du mouvement, les valeurs du rayon r sont données par l'inégalité $E_{p,eff}(r) \leqslant E_m$. Expliquer ce résultat.

10) Le graphe de $E_{p,eff}(r)$ pour une valeur donnée de L_0 est représenté figure 3. On montre que la trajectoire du satellite est nécessairement une conique : circulaire, elliptique, parabolique ou hyperbolique.

a) À quelle énergie E_{m1} ou E_{m2} peut correspondre une trajectoire elliptique? une trajectoire hyperbolique?

b) Pour quelle valeur particulière de E_m la trajectoire est-elle circulaire?

1.4 Mise en orbite haute du satellite

Pour atteindre des trajectoires de très hautes altitudes, le satellite est dans un premier temps placé sur une trajectoire circulaire basse ($r_b = 8{,}0.10^3$ km) puis, dans un deuxième temps, sur une trajectoire circulaire haute ($r_h = 40.10^3$ km) comme illustré sur la figure 4.

Pour passer de la trajectoire basse à la trajectoire haute, on utilise une trajectoire de transfert elliptique dont l'un des foyers est le centre de la Terre O : son périgée P est situé sur l'orbite basse et son apogée A sur l'orbite haute.

Le changement d'orbite s'effectue en réalisant des variations brutales de vitesse du satellite à l'aide des moteurs qui correspondent à des variations d'énergie mécanique que l'on cherche à déterminer.

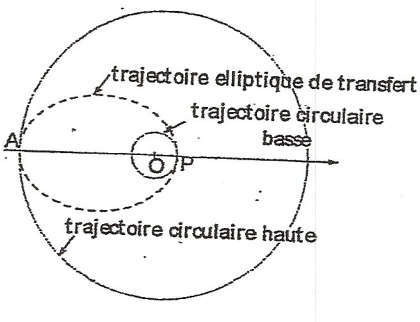


Figure 4

On considère désormais le satellite parcourant la trajectoire elliptique de transfert.

11) Que peut-on dire des valeurs de $\dot{r}$ lorsque le satellite est en A ($r = r_h$) ou en P ($r = r_b$) ? Comment s'exprime le demi-grand axe a de l'ellipse de transfert en fonction de r_b et r_h ?

12) Montrer à l'aide de la conservation de l'énergie mécanique que r_h et r_b sont solutions d'une équation du second degré de la forme $r^2 + \alpha r + \beta = 0$. Exprimer α et β en fonction de m, L_0, E_m, g_0 et R_T.

13) En déterminant la somme des racines de l'équation, en déduire que $E_{m,t} = -\dfrac{g_0 m R_T^2}{2a}$.

14) Relever sur la figure 5 la valeur de l'énergie mécanique $E_{m,t}$ du satellite sur la trajectoire de transfert elliptique. Justifier.

Pour changer de trajectoire le satellite, il faut modifier la valeur de son énergie mécanique. Durant cette phase le principe de conservation de l'énergie n'est plus vérifié. Ce sont les moteurs du satellite qui vont permettre d'accélérer ou de ralentir le satellite.

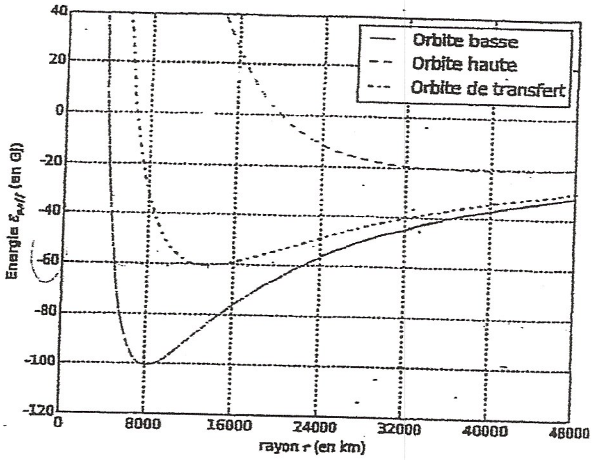


Figure 5 - $E_{p,eff}(r)$ pour les 3 orbites

15) Relever sur la figure 5 la valeur de l'énergie mécanique $E_{m,b}$ du satellite sur l'orbite circulaire basse de rayon $r_b = 8{,}0.10^3$ km. De même relever la valeur de l'énergie mécanique $E_{m,h}$ du satellite sur l'orbite circulaire haute de rayon $r_h = 40.10^3$ km.

16) En déduire la variation d'énergie mécanique ΔE_{mP} à communiquer au satellite pour passer en P de l'orbite circulaire basse à l'orbite elliptique de transfert. Sachant que le pouvoir calorifique du carburant est d'environ 50 MJ.kg^{-1}, déterminer la masse m_c de carburant nécessaire.

17) Connaissez vous un carburant utilisé dans les moteurs-fusées pour l'aérospatiale? Qu'appelle-t-on orbite géostationnaire? Connaissez-vous l'altitude de cette orbite?

1.5 Chute du satellite

Les satellites d'observation retombent inéluctablement sur la Terre. Lors des chocs avec les molécules contenues dans les couches supérieures de l'atmosphère, le satellite est soumis à une force de frottement $\vec{f}$ du type $\vec{f} = -k\vec{v}$.

Supposons que le satellite est en orbite circulaire. Au cours de sa chute, à chaque tour effectué, la variation d'altitude est suffisamment faible pour supposer que les expressions de l'énergie mécanique $E_m(t) = -\dfrac{g_0 m R_T^2}{2r(t)}$ et de la vitesse $v^2(t) = g_0\dfrac{R_T^2}{r(t)}$ restent valables.

18) À l'aide de l'expression de la vitesse, déterminer la durée T nécessaire au satellite pour effectuer un tour de l'orbite circulaire de rayon r. Quelle est le nom de la relation obtenue?

19) À l'aide du théorème de l'énergie mécanique, montrer que le rayon $r(t)$ est solution de l'équation différentielle

$$\frac{dr}{dt} + \frac{1}{\tau}r(t) = 0,$$

où τ est une constante que l'on exprimera en fonction de k et m. Montrer que τ est bien homogène à un temps.

20) En déduire l'expression de $r(t)$. On supposera que le satellite est à l'instant $t = 0$ sur une orbite circulaire de rayon r_0.

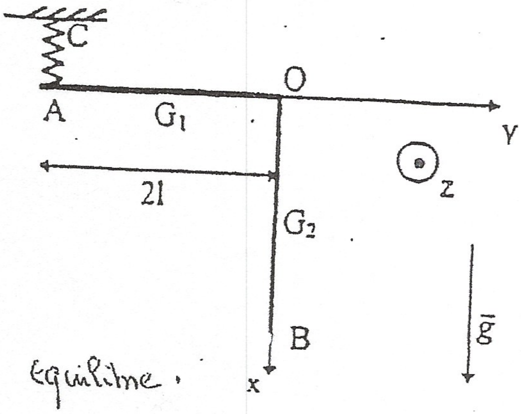
21) Représenter graphiquement sur votre copie l'évolution de $r(t)$. On fera apparaitre notamment les grandeurs r_0 et τ et on négligera R_T devant r_0.

EXERCICE 2 : Solide en rotation

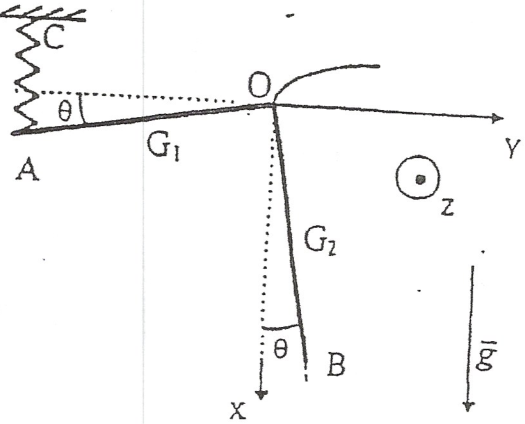
Un solide (S) est constitué de deux tiges homogènes rigidement liées l'une à l'autre, AO et OB, faisant entre elles un angle constant de 90° (figure 1). Chaque tige a pour masse m et pour longueur 2l. (S) peut tourner autour d'un axe horizontal (Δ) passant par O (soit Oz).

I-1 La liaison en O est une liaison pivot parfaite. Un ressort de masse négligeable, de constante de raideur k, est accroché à l'une de ses extrémités en A, l'autre extrémité C étant maintenue fixe. Lorsque l'ensemble est en équilibre dans le champ de pesanteur, AO est horizontal, et OB vertical.
On donne le moment d'inertie d'une tige de masse m et de longueur 2l, par rapport à un axe perpendiculaire à la tige et qui passe par une extrémité : $I = 4\,ml^2/3$.

On note L la longueur de ressort et L_0, sa longueur à vide.



Équilibre.



1-On note J le moment d'inertie de l'ensemble des 2 tiges par rapport à l'axe Δ .

a-Calculer J.

b-Déterminer l'allongement du ressort $\Delta L = L_E - L_0$ lorsque le système est à l'équilibre.

2- On met le solide en mouvement avec les conditions initiales suivantes au point B:
$\theta_0 = 0$ *et* $\dot{\theta}_0 = \omega_0$

En appliquant le théorème de l'énergie cinétique, déterminer la vitesse angulaire $\dot{\theta}$ en fonction de θ .

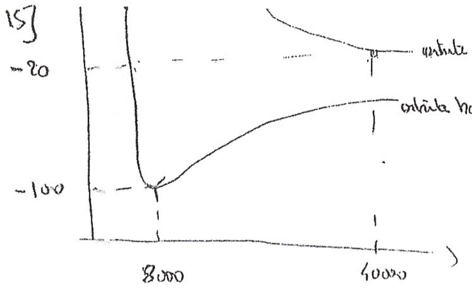
3-On se propose d'étudier les oscillations de petit angle θ autour de la position d'équilibre; on pourra de ce fait, considérer que la force exercée par le ressort sur le solide reste verticale pendant tout le mouvement.

a- En appliquant le théorème du moment cinétique, déterminer l'équation différentielle vérifiée par θ .

b- les angles θ étant faibles, que devient l'équation en utilisant : $\cos(\theta) = 1$ *et* $\sin(\theta) = \theta$ Montrer alors que le mouvement est sinusoïdal et donner l'expression de la période.

c-Retrouver l'équation différentielle par une méthode énergétique.

15]



$$\boxed{\begin{array}{l} E_{m,b} = -100\ GJ \\ E_{m,h} = -20\ GJ \end{array}}$$

16] Pour passer de l'orbite basse à l'orbite elliptique, il faut fournir au satellite $\Delta E = E_{m,ellipse} - E_{m\,b} = -35 + 100 = 65\ GJ$.

$m_c = \dfrac{\Delta E_m}{P_c} = \dfrac{65 \cdot 10^3}{50} = 1300\ kg$

P_c = pouvoir calorifique du carburant $\simeq 50\ MJ\ kg^{-1}$.

17] oxygène et hydrogène liq.

L'orbite géostationnaire est l'orbite circulaire ds le plan équatorial à 36000 km d'altitude. Sa particularité est d'avoir la même période de rotation que la Terre. Le satellite est immobile ds le référentiel terrestre local.

1.5 Chute de satellite.

18) $2\pi r = v \cdot T \Rightarrow \boxed{\dfrac{T^2}{r^3} = \dfrac{4\pi^2}{g_0 R_T^2}}$ 3° loi de Kepler.

19) $\dfrac{dE_m}{dt} = -k\vec{v} \cdot \vec{v} = -kv^2$ avec $v^2 = \dfrac{g_0 R_T^2}{r}$ et $E_m = -\dfrac{m g_0 R_T^2}{2r}$.

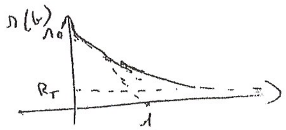
d'où $\dfrac{dE_m}{dt} = \dfrac{m g_0 R_T^2}{2} \dfrac{\dot{r}}{r^2}$; on obtient : $\dfrac{m g_0 R_T^2 \cdot \dot{r}}{2r} + \dfrac{k g_0 R_T^2}{r} = 0$.

donc $\boxed{\dot{r}(t) + \dfrac{2k}{m} r(t) = 0}$. avec $\boxed{\tau = \dfrac{m}{2k}}$ $[k] = \dfrac{\text{Force}}{\text{vitesse}} = \dfrac{MLT^{-2}}{LT^{-1}} = MT^{-1}$

$[\tau] = \dfrac{M}{MT^{-1}} = T$.

20] $r(t) = r_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$.

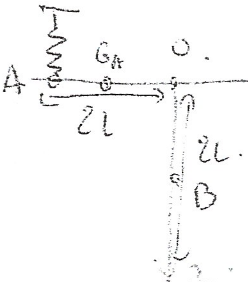
21]



$(r(t) > R_T)$.

Ex 2 Solide en rotation

1°) a] $J = 2 \cdot J = \frac{8m\ell^2}{3}$



b]. A l'éq. $\sum \mathcal{M}_{\vec F} = \vec 0$

avec $\vec F = -k(L_E - L_0)\vec{u_p}$ appliqué en A.

$\vec{P_A} = m\vec g$ appliqué en G_A

$\vec{P_B} = m\vec g$ // en G_B

$\vec R$ (réaction de l'axe) appliquée en O.

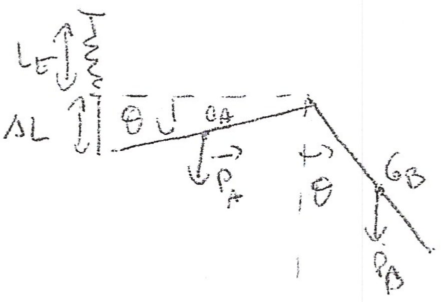
$\mathcal{M}_{\vec R} = \vec 0 \Rightarrow \mathcal{M}_O(\vec{P_A}) + \mathcal{M}_O(\vec{P_B}) + \mathcal{M}_O(\vec R) = \vec 0$

$\vec{OG_A} \wedge \vec{P_A} + \underbrace{\vec{OB} \wedge \vec{P_B}}_{= 0} + \vec{OA} \wedge \vec{R} = \vec 0$

$-\ell \vec{e_y} \wedge mg\vec{e_x} + 0 - 2\ell\vec{e_y} \wedge \left(-k(L_E - L_0)\vec{e_x}\right) = \vec 0$

$mg\ell\vec{e_z} - 2\ell k(L_E - L_0)\vec{e_z} = 0 \Rightarrow \boxed{2k(L_E - L_0) = mg}$

2°) Le solide est mis en mvt.



$\frac{1}{2}J\dot\theta^2 - \frac{1}{2}J\omega^2 = W_{E\to n}(\vec{P_A}) + W_{E\to n}(\vec{P_B}) + W_{E\to n}(\vec T)$

$\vec T = -k(L_E + \Delta L' - L_0)\vec{e_x}$

et $\Delta L' = 2\ell\sin\theta$

$W_{E\to n}(\vec{T}) = \frac{1}{2}k(l_E - l_0)^2 - \frac{1}{2}k(l_E + \Delta l' - l_0)^2$

$W_{E\to n}(\vec{P_A}) = mg\ell\sin\theta$

$W_{E\to n}(\vec{P_B}) = mg\ell(\cos\theta - 1)$

d'où $\frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}J\omega_0^2 = \underbrace{\frac{1}{2}k\left(\frac{mg}{2k}\right)^2 - \frac{1}{2}k\left(\frac{mg}{2k} + 2\ell\sin\theta\right)^2}_{-k\cdot\frac{mg}{2k}\cdot 2\ell\sin\theta - \frac{1}{2}k\,4\ell^2\sin^2\theta} + mg\ell\sin\theta + mg\ell(\cos\theta - 1)$

$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}J\omega_0^2 = -2k\ell^2\sin^2\theta + mg\ell(\cos\theta - 1)}$ (1)

B] Oscillations de faible amplitude

a

$J\ddot{\theta} = \underset{>0}{\mathcal{M}_\Delta \vec{P_A}} + \underset{<0}{\mathcal{M}_\Delta \vec{P_B}} + \underset{<0}{\mathcal{M}_\Delta \vec{T}} + \underset{=0}{\mathcal{M}_\Delta \vec{R}} = - k(l_E + \Delta l' - l_0)\cdot 2\ell\cos\theta + mg\ell\cos\theta - mg\ell\sin\theta$

$J\ddot{\theta} = \left[mg - 2k\left(\underbrace{(l_E - l_0)}_{\frac{mg}{2k}} + 2\ell\sin\theta\right)\right]\ell\cos\theta - mg\ell\sin\theta$

$J\ddot{\theta} = -4k\ell^2\cos\theta\sin\theta - mg\ell\sin\theta$ qui devient avec $\cos\theta \simeq 1$ et $\sin\theta \simeq \theta$,

$J\ddot{\theta} = (-4k\ell^2 - mg\ell)\theta$

$\ddot{\theta} + \left(\frac{4k\ell^2 + mg\ell}{J}\right)\theta = 0 \Rightarrow \boxed{\omega_0^2 = \frac{4k\ell^2 + mg\ell}{\frac{8m\ell^2}{3}} = 3\left[\frac{k}{2m} + \frac{g}{8\ell}\right]}$

et $\boxed{T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}}$

c] En dérivant (1) par rapport à t $J\dot{\theta}\ddot{\theta} = [-4k\ell^2\sin\theta\cos\theta - mg\ell\sin\theta]\dot{\theta}$

$\Rightarrow \boxed{J\ddot{\theta} = -4k\ell^2\sin\theta\cos\theta - mg\ell\sin\theta}$ On retrouve la ... éq. diff.

Ex1 Mvt d'un satellite.

1.1]

1) $\vec{OM} = r\vec{u_r}$

$\vec{v} = \dot{r}\vec{u_r} + r\dot{\theta}\vec{u_\theta}$

2) $E_p(r) = -mg_0\frac{R_T^2}{r}$ et $\delta W_{\vec{F}} = F(r)dr = -dE_p$ avec $\vec{F}(r) = F(r)\vec{u_r}$

$F(r) = -\frac{dE_p}{dr} \Rightarrow F(r) = -\frac{mg_0R_T^2}{r^2} < 0$ Force attractive.

3) $\vec{L_0} = \vec{OM} \wedge m\vec{v}$ est le moment cinétique.
$= mr^2\dot{\theta}\vec{e_z}$

Théorème du moment cinétique $\frac{d\vec{L_0}}{dt} = \vec{OM}\wedge\vec{F} = \vec{0}$ car $\vec{OM}$ et $\vec{F}$ sont colinéaires.

1.2] Mise en orbite circulaire :

4] $\vec{OM} = r\vec{e_r}$ $\vec{v} = r\dot{\theta}\vec{u_\theta} = v\vec{u_\theta}$

$\vec{a} = r\ddot{\theta}\vec{u_\theta} - r\dot{\theta}^2\vec{u_r} = \dot{v}\vec{u_\theta} - \frac{v^2}{r}\vec{u_r}$

5] PFD projeté sur $\vec{u_\theta}$ $\Rightarrow$ $\dot{v} = 0$ $\Rightarrow v = $ cste.

PFD projeté sur $\vec{u_r}$ $\rightarrow$ $-\frac{mv^2}{r} = -\frac{mg_0R_T^2}{r^2} \Rightarrow$ $\boxed{v = \sqrt{\frac{g_0R_T^2}{r}}}$

6] $E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}\frac{mg_0R_T^2}{r}$
$E_p = -\frac{mg_0R_T^2}{r}$
$\boxed{E_m = E_c + E_p = -\frac{1}{2}\frac{mg_0R_T^2}{r}} < 0$ (état lié)

7] AN.

$r_b = 80.10^3$ km $\Rightarrow E_{m,b} = -100$ GJ.

$r_h = 40.10^3$ km $\Rightarrow E_{m,h} = -20$ GJ.

1.3] Etude énergétique du satellite.

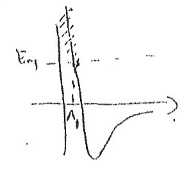
8] $E_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 - mg_0\frac{R_T^2}{r}$ avec $L_0 = mr^2\dot{\theta} \Rightarrow \dot{\theta} = \frac{L_0}{mr^2}$

$E_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{L_0^2}{2mr^2} - mg_0\frac{R_T^2}{r}$

9] $E_{p,eff}(r) = E_m - \frac{1}{2}m\dot{r}^2 = \frac{L_0^2}{2mr^2} - mg_0\frac{R_T^2}{r}$. donc $\boxed{\frac{1}{2}m\dot{r}^2 = E_m - E_{p,eff}(r) \geq 0}$

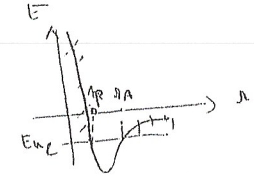
Au cours du mouvement, les valeurs de r permises sont celles vérifiant l'inégalité $E_m \geq E_{p,eff}(r)$ car $\frac{1}{2}m\dot{r}^2 \geq 0$.

10] a) Pour E_{m_1}



seules les valeurs $r > r_1$ conviennent, la trajectoire est non bornée donc hyperbolique.

Pour E_{m_2}



seules les valeurs de r vérifiant $r_P < r < r_A$ conviennent, la trajectoire est elliptique.

b) lorsque la trajectoire est circulaire $r = $ cste $\Rightarrow \dot{r} = 0 \Rightarrow E = E_{min}$.

1.4 Mise en orbite haute du satellite,

11] $\dot{r} = 0$ en A et P puisque r_A = distance maximale et r_P = distance minimale.

$E_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{L_0^2}{2mr^2} - mg_0\frac{R_T^2}{r} = E_m(A) = \frac{L_0^2}{2mr_A^2} - mg_0\frac{R_T^2}{r_A} = \frac{L_0^2}{2mr_P^2} - mg_0\frac{R_T^2}{r_P}$.

donc r_A et r_P sont les solutions de

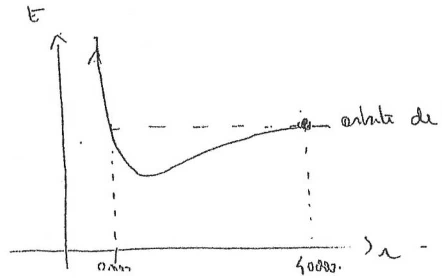
$E_m = \frac{L_0^2}{2mr^2} - mg_0\frac{R_T^2}{r}$ ou encore $r^2 - \frac{L_0^2}{2m.E_m} + \frac{mg_0R_T^2.r}{E_m} = 0$.

ou $r^2 + \alpha r + \beta = 0$.

avec $\beta = -\frac{L_0^2}{2mE_m}$ et $\alpha = \frac{mg_0R_T^2}{E_m}$. avec la somme des racines $= -\alpha$.

$\Rightarrow r_A + r_P = 2a = -\frac{mg_0R_T^2}{E_m}$ $\Rightarrow$ $\boxed{E_m = -\frac{mg_0R_T^2}{2a}}$.

14].



$\boxed{E_{m_T} = -35 \text{ GJ}}$