Devoir à la maison n° 11

Exercice 1. Dans $E = \mathbb{R}^4$, on considère le vecteur $u_0 = (1, 1, 0, 0)$ et les sous-ensembles :

$$F = \mathrm{Vect}(u_0) \quad \text{et} \quad G = \{(x, y, z, t) \in E \mid x + y = z + t\}.$$

1. Justifier que F et G sont des sous-espaces vectoriels de E.
2. Montrer que F et G sont en somme directe.
3. Montrer que : $\forall u \in E,\ \exists \lambda \in \mathbb{R},\ u - \lambda u_0 \in G$. En déduire que F et G sont supplémentaires.
4. Déterminer la décomposition de $v = (3, 8, 9, 6)$ selon F et G.

Exercice 2.

1. Montrer par récurrence double qu'il existe, pour tout n dans $\mathbb{N}$, un polynôme $T_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ T_n(\cos x) = \cos(nx).$$

   Lors de cette récurrence, vérifier que : $\forall n \in \mathbb{N},\ T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n$.
2. Calculer T_k pour $k \in [\![0, 5]\!]$.
3. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille de polynômes $(T_0, T_1, T_2, \ldots, T_n)$ est libre.
4. On note, pour tout n dans $\mathbb{N}$, $f_n : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \cos(nx) \end{array} \right.$.

   Déduire de la question précédente que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $(f_0, f_1, f_2, \ldots, f_n)$ est libre.