Devoir surveillé n° 6

Durée : 3 heures. Calculatrices non autorisées.
La notation tiendra largement compte de la qualité de la rédaction.
Les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans l'ordre souhaité.
Les exercices qui ne sont pas traités dans l'ordre doivent être rédigés sur des copies séparées.
Le sujet et le brouillon ne sont pas à rendre. Le barème est indicatif.

Exercice 1. *(6 points)* Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, on note : $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$.
On souhaite montrer que : $S_n(x) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} e^x$. On considère pour cela la fonction $f_n : x \mapsto e^{-x} S_n(x)$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$.
   (a) Justifier que la fonction f_n est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
   (b) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f_n'(x) = e^{-x}\left(S_{n-1}(x) - S_n(x)\right)$. Simplifier alors cette expression.
2. Soit $r \in \mathbb{R}_+^*$, et soit $x \in [-r, r]$.
   (a) Montrer que $\frac{r^n}{(n-1)!} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.
   (b) En déduire qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geq N,\ |f_n'(x)| \leq \frac{1}{n}$.
   (c) En déduire que : $\forall n \geq N,\ \left|\frac{S_n(x)}{e^x} - 1\right| \leq \frac{r}{n}$. Conclure.

Exercice 2. *(8 points)* Pour tout polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$, on note $R(P)$ l'ensemble des racines complexes de P, $r(P)$ le cardinal de $R(P)$ et, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\mu_P(z)$ la multiplicité de z comme racine de P. Par convention, si $z \notin R(P)$, alors $\mu_P(z) = 0$.
Par exemple, pour $P = (X^2-1)^3$, on a $R(P) = \{-1, 1\}$, $r(P) = 2$ et $\mu_P(-1) = 3$.
Soient $A, B, C \in \mathbb{C}[X]$ tels que $A + B = C$. On suppose que A, B, C ne sont pas tous les trois constants, et qu'ils n'ont pas de racines communes : $R(A)$, $R(B)$ et $R(C)$ sont donc disjoints deux à deux.
On souhaite démontrer l'*inégalité de Mason-Stothers* :

$$r(A) + r(B) + r(C) \geq 1 + \max\left(\deg(A), \deg(B), \deg(C)\right).$$

On pose $Q = BA' - B'A$. On admet que Q est non nul. On note enfin $S = \deg(A) + \deg(B) + \deg(C)$.

1. (a) Montrer que : $\deg(Q) \leq \deg(A) + \deg(B) - 1$.
   (b) Montrer que : $Q = BC' - B'C = CA' - C'A$.
   En déduire que : $\deg(Q) \leq S - 1 - \max\left(\deg(A), \deg(B), \deg(C)\right)$.
2. (a) Soit $z \in R(A)$. Montrer que :
   $$\mu_Q(z) \geq \mu_A(z) - 1 \quad \text{et} \quad (\mu_A(z) - 1 > 0) \Leftrightarrow (z \in R(A) \cap R(Q)).$$
   (b) En déduire que : $\deg(Q) \geq \sum_{z \in R(A)} (\mu_A(z) - 1) + \sum_{z \in R(B)} (\mu_B(z) - 1) + \sum_{z \in R(C)} (\mu_C(z) - 1)$.
   (c) En déduire que : $\deg(Q) \geq S - (r(A) + r(B) + r(C))$. Conclure.
3. Soit $n \geq 3$ entier. Soient $A, B, C \in \mathbb{C}[X]$ non nuls, sans racines communes, tels que $A^n + B^n = C^n$.
   À l'aide de l'inégalité de Mason-Stothers, montrer que A, B, C sont constants.

Exercice 3. *(6 points)* On considère deux fonctions $f, g : [0,1] \to [0,1]$ continues telles que $f \circ g = g \circ f$.
On va montrer qu'il existe $x_0 \in [0,1]$ tel que $f(x_0) = g(x_0)$, en procédant par l'absurde.
On suppose donc que x_0 n'existe pas.

1. (a) Montrer que $f - g$ est de signe constant.
   (b) En déduire qu'il existe $m > 0$ tel que : $\forall x \in [0,1],\ |f(x) - g(x)| \geq m$.
2. On suppose dans la suite de l'exercice que $f - g$ est positive. Soit $x \in [0,1]$.
   (a) Montrer que : $f(g(x)) - g(g(x)) \geq m$ et $f(f(x)) - f(g(x)) \geq m$.
   (b) En déduire que : $f(f(x)) \geq 2m + g(g(x))$.
   (c) En déduire que : $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ f^k(x) \geq km + g^k(x)$ (où $f^k = \underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{k \text{ fois}}$). Conclure.

Problème. *(12 points)* On souhaite étudier les dérivées successives de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{\sin(x)}{x}$.

I. 1. Justifier que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$.
   2. Calculer, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f'(x)$ et $f''(x)$.
   3. Rappeler, selon $n \in \mathbb{N}$, la valeur de $\sin^{(n)}$.

II. On souhaite montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $P_n, Q_n \in \mathbb{R}[X]$ tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)\sin^{(n)}(x) + Q_n(x)\sin^{(n+1)}(x)}{x^{n+1}}.$$

   1. Donner les expressions de P_n et Q_n pour $n \in [\![0,2]\!]$.
   2. Démontrer par récurrence l'existence des P_n et des Q_n, et vérifier à cette occasion que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad P_{n+1} = XP_n + XQ_n' - (n+1)Q_n \quad \text{et} \quad Q_{n+1} = XQ_n - XP_n' + (n+1)P_n.$$

   3. En déduire P_3 et Q_3.
   4. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n et Q_n sont des polynômes à coefficients entiers. Déterminer leur degré et leur coefficient dominant.

III. Soit $n \in \mathbb{N}$.

   1. Appliquer la formule de Leibniz (pour la dérivée $n^{\text{ème}}$) à l'égalité $xf(x) = \sin(x)$.
      En déduire de nouvelles relations entre P_n, Q_n, P_{n+1} et Q_{n+1}.
   2. En déduire que $P_n' = Q_n$, puis que $P_n'' + P_n = X^n$.
   3. En déduire que $P_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} a_k X^{n-2k}$, où p et les a_k sont à déterminer.
   4. En déduire les solutions de l'équation différentielle $y'' + y = x^n$.