CCINP PC 2024

Eléments de correction

EXERCICE 1

Q1. Je calcule le polynôme caractéristique de A :

$$\chi_A(X) = \begin{vmatrix} X-4 & 12 \\ 1 & X-5 \end{vmatrix} = (X-4)(X-5) - 12 = X^2 - 9X + 20 - 12 = (X-1)(X-8)$$

Le polynôme caractéristique de A est scindé à racines simples (1 et 8) donc A est diagonalisable et $\text{Sp}(A) = \{1, 8\}$; A est donc semblable à la matrice $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$: il existe $P \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ matrice inversible telle que $A = PDP^{-1}$.

Q2. Soit $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On a :

$$B^3 = A \iff P^{-1}B^3P = P^{-1}AP \iff (P^{-1}BP)^3 = D$$

Q3. On a $D = \Delta^3$ donc $D\Delta = \Delta^3\Delta = \Delta^4 = \Delta\Delta^3 = \Delta D$.

On note $\Delta = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. On a $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$ d'où $\begin{pmatrix} a & b \\ 8c & 8d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 8b \\ c & 8d \end{pmatrix}$ donc $8b = b$ et $c = 8c$ donc $b = c = 0$ d'où $D = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$ est diagonale.

Remarque : autre rédaction possible, comme D et Δ commutent, les sous-espaces propres de $\Delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$ sont stables par D donc $\text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ et $\text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ sont stables par D .

D'où $D \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$, ce qui signifie que la première colonne de D est colinéaire à $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

De même, la deuxième colonne de D , $D \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ est colinéaire à $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Par conséquent, Δ est diagonale.

Q4. Soit Δ une racine cubique de D : $\Delta^3 = D$. D'après la question précédente, Δ est diagonale : $\Delta = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$ donc $a^3 = 1$ et $d^3 = 8$ donc $a = 1$ et $d = 2$, $\Delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Réciproquement, la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ vérifie bien } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^3 = D.$$

Il y a une unique racine cubique de D : $\Delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

On reprend les équivalences de Q2, pour $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, en utilisant l'unicité de la racine cubique de D :

$$B^3 = A \iff (P^{-1}BP)^3 = D \iff P^{-1}BP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \iff B = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} P^{-1} \iff B = P\Delta P^{-1}$$

Donc A possède une unique racine cubique, $B = P\Delta P^{-1}$.

Q5. u est la rotation d'angle θ .

Q6. La matrice $R\left(\frac{\theta}{3}\right) = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\theta}{3}\right) & -\sin\left(\frac{\theta}{3}\right) \\ \sin\left(\frac{\theta}{3}\right) & \cos\left(\frac{\theta}{3}\right) \end{pmatrix}$ vérifie $R\left(\frac{\theta}{3}\right)^3 = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ car d'après le cours $R\left(\frac{\theta}{3}\right)R\left(\frac{\theta}{3}\right) = R\left(\frac{\theta}{3} + \frac{\theta}{3}\right)$

Remarque : on peut vérifier par un calcul un peu lourd à écrire, en utilisant les formules de trigonométrie, que $R\left(\frac{\theta}{3}\right)^3 = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ mais il est plus rapide d'utiliser le cours.

méthode : montrer qu'une matrice est diagonalisable

plus généralement tout polynôme en Δ commute avec Δ
méthode calculatoire, que l'on réserve au cas de matrices 2x2 ou 3x3

$D \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est la première colonne de D

on cherche l'ensemble des racines cubiques, il faut bien établir une équivalence (égalité d'ensemble); ne pas oublier la réciproque ou rédiger par équivalence

cours

il fallait penser géométriquement : tourner 3 fois d'un angle de $\theta/3$ revient à tourner d'un angle θ et la multiplication matricielle est une traduction de la composition des applications linéaires

Q7. D'après le cours, N est de la forme $N = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}$, on peut vérifier par le calcul (ou par le cours N est la matrice d'une réflexion, c'est à dire une symétrique orthogonale par rapport à une droite) que $N^2 = I_2$ donc $N^3 = N$ et N est une racine cubique de N .

cours sur la classification des isométries en dim 2; N est la matrice d'une réflexion donc $N^2 = I_2$

Q8. $\lambda \in \mathbb{R}$ et $x \mapsto x^3$ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ donc il existe un unique $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\alpha^3 = \lambda$. La matrice αI_p est une racine cubique de $H_p(\lambda)$ car $(\alpha I_p)^3 = \alpha^3 I_p = \lambda I_p = H_p(\lambda)$.

Q9. A étant diagonalisable, il existe P inversible tel que :

$$A = P \begin{pmatrix} H_{p_1}(\lambda_1) & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & H_{p_d}(\lambda_d) \end{pmatrix} P^{-1}$$

Je pose $B = P \begin{pmatrix} \alpha_1 I_{p_1} & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \alpha_d I_{p_d} \end{pmatrix} P^{-1}$, avec $\alpha_i^3 = \lambda_i$. On a :

$$B^3 = P \begin{pmatrix} \alpha_1^3 I_{p_1} & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \alpha_d^3 I_{p_d} \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} H_{p_1}(\lambda_1) & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & H_{p_d}(\lambda_d) \end{pmatrix} P^{-1} = A$$

rédaction pour une existence si on a deviné comment définir l'objet : il faut écrire "je pose" ou "je définis"...

Q10. A est inversible donc 0 n'est pas valeur propre de A .

cours

Rappelons une démonstration : $\chi_A(0) = \det(-A) = (-1)^n \det(A) \neq 0$ car A est inversible; donc 0 n'est pas racine de χ_A .

Q11. Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $z^3 = \lambda$. $Z \neq 0$ car $\lambda \neq 0$. On note $z = r e^{i\alpha}$ avec $r > 0$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

On a $\rho e^{i\theta} = z^3 = r^3 e^{3i\alpha}$ donc $r^3 = \rho$ et $3\alpha = \theta + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, soit $\alpha = \frac{\theta}{3} + \frac{2k\pi}{3}$, ce qui donne 3 solutions distinctes pour z :

$$z \in \left\{ \rho^{\frac{1}{3}} e^{i\frac{\theta}{3}}, \rho^{\frac{1}{3}} e^{2i\frac{\theta}{3}}, \rho^{\frac{1}{3}} e^{-2i\frac{\theta}{3}} \right\}$$

Réciproquement, on vérifie immédiatement que les trois nombres complexes ci-dessus vérifient $z^3 = \lambda$.

Q12. D'après la question précédente, en notant z_{1k}, z_{2k} et z_{3k} les trois racines cubiques de $\lambda_k \in \mathbb{C}^*$ ($\lambda_k \neq 0$ d'après Q10),

$$X^3 - \lambda_k = (X - z_{1k})(X - z_{2k})(X - z_{3k})$$

Donc

$$Q(X) = \prod_{k=1}^d (X - z_{1k})(X - z_{2k})(X - z_{3k})$$

et $z_{ik} \neq z_{ik'}$ pour $k \neq k'$ car $z_{ik}^3 = \lambda_k$ et $z_{ik'}^3 = \lambda_{k'}$ et $\lambda_k \neq \lambda_{k'}$. Q est donc scindé à racines simples.

Q13. Supposons $B^3 = A$. A est diagonalisable donc le polynôme $\Pi_A = \prod_{\lambda \in \text{Sp}(A)} (X - \lambda) = \prod_{k=1}^d (X - \lambda_k)$ est un polynôme annulateur de A . Alors

la question précédente nous guide : on pense au th du cours, B diagonalisable si et seulement B possède un poly annulateur scindé simple; on veut montrer que $Q(B) = 0$

$$Q(B) = \prod_{k=1}^d (B^3 - \lambda_k I_n) = \prod_{k=1}^d (A - \lambda_k I_n) = \Pi_A(A) = 0$$

Donc B possède un polynôme annulateur Q , scindé à racines simples d'après la question précédente, donc B est diagonalisable.

EXERCICE 2

Q14. Soit $x \in]0, +\infty[$. On utilise $\ln(1+u) \underset{u \rightarrow 0}{=} u + \mathcal{O}(u^2)$:

$$u_n(x) = x \ln \left(1 + \frac{x}{n} \right) - \ln \left(1 + \frac{x}{n} \right) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} x \left[\frac{1}{n} + \mathcal{O} \left(\frac{1}{n^2} \right) \right] - \left[\frac{x}{n} + \mathcal{O} \left(\frac{x^2}{n^2} \right) \right] \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \mathcal{O} \left(\frac{1}{n^2} \right)$$

on pouvait aussi utiliser $\ln(1+u) \underset{u \rightarrow 0}{=} u - \frac{u^2}{2} + o(u^2)$

Donc la série numérique $\sum_{n \geq 1} u_n(x)$ est absolument convergente (donc convergente) par comparaison à la série de Riemann convergente $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$. Par conséquent, la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge simplement sur $]0, +\infty[$.

Q15. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction $x \mapsto x \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right)$ (fonction polynômiale de degré 1) est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Et $x \mapsto \ln \left(1 + \frac{x}{n}\right)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ par composée de fonctions $\mathcal{C}^1$, ($\ln$ étant $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$). Donc par somme de fonctions $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$, u_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$.

Pour tout $x > 0$,

$$u'_n(x) = \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{\frac{1}{n}}{1 + \frac{x}{n}} = \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{1 + x/n - x/n}{n + x} = \frac{x/n}{n + x} + \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n}$$

On pose $\varepsilon_n = \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n}$ et la série $\sum_{n \geq 1} \varepsilon_n$ est absolument convergente car $|\varepsilon_n| \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2n^2}$ terme général d'une série convergente car $\sum 1/n^2$ est convergente.

Q16. Soit $[a, b]$ un segment inclus dans $]0, +\infty[$. On a par l'inégalité triangulaire,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [a, b], |u'_n(x)| \leq \left| \frac{x}{n(n+x)} \right| + |\varepsilon_n| = \frac{x}{n(n+x)} + |\varepsilon_n| \leq \frac{b}{n(n+a)} + |\varepsilon_n|$$

Donc par passage à la borne supérieure pour $x \in [a, b]$,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \|u'_n\|_{\infty, [a, b]} \leq \frac{b}{n(n+a)} + |\varepsilon_n|$$

Or la série $\sum_{n \geq 1} \frac{b}{n(n+a)}$ est convergente car $\frac{b}{n(n+a)} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$ et la série $\sum |\varepsilon_n|$ converge d'après la question précédente.

Donc par majoration la série $\sum_{n \geq 1} \|u'_n\|_{\infty, [a, b]}$ est convergente; d'où la convergence normale de la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} u'_n$ sur $[a, b]$.

Q17. On vérifie que φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ par le *théorème de dérivabilité de la somme d'une série de fonctions* :

- pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'application u_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ (Q15)
- la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur $]0, +\infty[$;
- la série de fonctions $\sum u'_n$ converge normalement (Q16) donc uniformément sur tout segment $[a, b]$ de $]0, +\infty[$

Donc l'application $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et $\left(\sum_{n=1}^{+\infty} u_n\right)' = \sum_{n=1}^{+\infty} u'_n$.

Donc par somme d'applications $\mathcal{C}^1$, φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et :

$$\forall x \in]0, +\infty[, \varphi'(x) = \frac{-1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n+x} \right]$$

▷ *Croissance de φ'* . Soit $(x, y) \in]0, +\infty[$, tel que $x \leq y$. On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n+x} \geq \frac{1}{n+y}$ donc $\ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n+x} \leq \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n+y}$ donc en sommant ces inégalités :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left[\ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n+x} \right] \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n+y} \right]$$

application du th de dérivabilité, les hypothèses ont été vérifiées aux questions précédentes

pour la croissance, on revient à la définition $x \leq y$ implique $\varphi'(x) \leq \varphi'(y)$, et cela s'obtient assez facilement car u'_n est croissante

et $\frac{-1}{x} \leq \frac{-1}{y}$, d'où

$$\varphi'(x) = \frac{-1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) - \frac{1}{n+x} \right] \leq \frac{-1}{y} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) - \frac{1}{n+y} \right] = \varphi'(y)$$

Donc φ' est croissante sur $]0, +\infty[$.

▷ Calcul de $\varphi(x+1) - \varphi(x)$. Soit $x \in]0, +\infty[$,

$$\begin{aligned} \varphi(x+1) - \varphi(x) &= -\ln(x+1) + \ln(x) + \sum_{n=1}^{+\infty} (u_n(x+1) - u_n(x)) \\ &= \ln(x) - \ln(x+1) + \underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} \left[\ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) - \ln \left(1 + \frac{x+1}{n} \right) + \ln \left(1 + \frac{x}{n} \right) \right]}_{=S} \end{aligned}$$

Nous allons voir que $S = \ln(x+1)$ par télescopage. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) - \ln \left(1 + \frac{x+1}{n} \right) + \ln \left(1 + \frac{x}{n} \right) &= \ln \left(\frac{n+1}{n} \right) - \ln \left(\frac{n+x+1}{n} \right) + \ln \left(\frac{n+x}{n} \right) \\ &= \ln \left(\frac{n+1}{n+1+x} \right) - \ln \left(\frac{n}{n+x} \right) \\ &= V_{n+1}(x) - V_n(x) \quad \text{avec } V_n(x) = \ln \left(\frac{n}{n+x} \right) \end{aligned}$$

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n(x) = 0$ donc par télescopage $\sum_{n=1}^{+\infty} V_{n+1}(x) - V_n(x) = 0 - V_1(x) = -\ln \left(\frac{1}{1+x} \right) = \ln(1+x)$
donc $S = \ln(x+1)$ puis

$$\varphi(x+1) - \varphi(x) = \ln(x) - \ln(x+1) + S = \ln(x)$$

Remarque : le point clé était de remarquer les télescopages : pour tout $N \in \mathbb{N}^*$,

- $\sum_{n=1}^N \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) = \sum_{n=1}^N \ln \left(\frac{n+1}{n} \right) = \ln(N+1) - \ln(1) = \ln(N+1)$
- $\sum_{n=1}^N \left[-\ln \left(1 + \frac{x+1}{n} \right) + \ln \left(1 + \frac{x}{n} \right) \right] = \sum_{n=1}^N \ln \left(\frac{n+x}{n+x+1} \right) = \ln(x+1) - \ln(N+x+1)$

▷ Enfin, en remarquant que $u_n(1) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\varphi(1) = -\ln(1) + \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(1) = 0$$

Q18. Soit $x > 0$. En utilisant les relations $\varphi(x+1) - \varphi(x) = \ln(x)$ et $g(x+1) - g(x) = \ln(x)$, (car g vérifie les conditions C) on a :

$$h(x+1) = \varphi(x+1) - g(x+1) = \ln(x) + \varphi(x) - (\ln(x) + g(x)) = \varphi(x) - g(x) = h(x)$$

De plus, φ et g sont dérivables sur $]0, +\infty[$ donc h également et en dérivant l'égalité $h(x+1) = h(x)$, on obtient, $h'(x+1) = h'(x)$.

Q19. On a $h'(x+p) = \varphi'(x+p) - g'(x+p)$.

Par croissance de φ' et g' , en sommant les inégalités :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi'(p) \leq \varphi'(x+p) \leq \varphi'(1+p) \\ -g'(1+p) \leq -g'(x+p) \leq -g'(p) \end{array} \right\} \text{ donc } \varphi'(p) - g'(1+p) \leq h'(x+p) \leq \varphi'(1+p) - g'(p)$$

calcul de somme par télescopage, calcul un peu délicat qui aurait pu faire l'objet d'une indication

il fallait penser à utiliser la croissance de φ' et g'

De plus, en dérivant la relation $g(t+1) - g(t) = \ln(t)$, on obtient $g'(t+1) - g'(t) = \frac{1}{t}$; par conséquent,

$$\varphi'(p) - g'(1+p) = \varphi'(p) - g'(p) - \frac{1}{p} = h'(p) - \frac{1}{p}$$

et de même, en utilisant $\varphi'(p+1) - \varphi'(p) = \frac{1}{p}$,

$$\varphi'(1+p) - g'(p) = \frac{1}{p} + \varphi'(p) - g'(p) = \frac{1}{p} + h'(p).$$

Donc en reprenant l'encadrement obtenu précédemment,

$$h'(p) - \frac{1}{p} \leq h'(x+p) \leq h'(p) + \frac{1}{p} \quad \text{soit} \quad -\frac{1}{p} \leq h'(x+p) - h'(p) \leq \frac{1}{p}$$

d'où $|h'(x+p) - h'(p)| \leq \frac{1}{p}$.

Q20. Commençons par fixer $x \in]0, 1]$. D'après Q18, on obtient par récurrence, laissée au lecteur, que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $h'(x+p) = h'(x)$ et $h'(p) = h'(1)$. On a donc par la question précédente,

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, |h'(x) - h'(1)| \leq \frac{1}{p} \quad \text{donc quand } p \rightarrow +\infty, |h'(x) - h'(1)| \leq 0 \text{ d'où } h'(x) = h'(1)$$

Nous avons donc montré que h' était constante sur $]0, 1]$.

Mais d'après Q18, h' est 1-périodique donc h' est constante sur $]0, +\infty[$.

Q21. D'après la question précédente, il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $x \in]0, +\infty[$, $h(x) = ax + b$. En utilisant $h(1) = \varphi(1) - g(1) = 0$ et $h(2) = h(1) = 0$ par la question Q18, on en déduit en résolvant le système $\begin{cases} a + b = 0 \\ 2a + b = 0 \end{cases}$ (ou en invoquant un argument géométrique : la courbe représentative de h est une droite passant par les points $A(1, 0)$ et $B(2, 0)$: c'est donc la droite d'équation $y = 0$) que :

$$\forall x \in]0, +\infty[, h(x) = 0 \quad \text{d'où} \quad f = g$$

Q22. Soit $N \in \mathbb{N}^*$.

En utilisant $\frac{1}{2} \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{n+1}{n}\right) = \ln \left(\sqrt{\frac{n+1}{n}}\right)$ et $\ln \left(1 + \frac{1}{2n}\right) = \ln \left(\frac{2n+1}{2n}\right)$:

$$\begin{aligned} \exp \left(\sum_{n=1}^N u_n(1/2) \right) &= \exp \left(\sum_{n=1}^N \frac{1}{2} \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) - \ln \left(1 + \frac{1}{2n}\right) \right) \\ &= \exp \left(\sum_{n=1}^N \ln \left(\sqrt{\frac{n+1}{n}} \frac{2n}{2n+1} \right) \right) \\ &= \exp \circ \ln \prod_{n=1}^N \left(\sqrt{\frac{n+1}{n}} \frac{2n}{2n+1} \right) \\ &= \sqrt{\frac{(N+1)!}{N!}} \frac{\prod_{n=1}^N (2n)}{\prod_{n=1}^N (2n+1)} \\ &= \sqrt{N+1} \frac{\left(\prod_{n=1}^N (2n) \right)^2}{\prod_{n=1}^N (2n+1)(2n)} = \sqrt{N+1} \frac{(2^N N!)^2}{(2N+1)!} \end{aligned}$$

Remarque : on peut aussi rédiger par récurrence sur N .

Q23. La formule de Stirling donne

$$N! \underset{N \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{2\pi N} \left(\frac{N}{e}\right)^N \quad \text{et} \quad (2N)! \underset{N \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{2\pi(2N)} \left(\frac{2N}{e}\right)^{2N}$$

idée : faire tendre $p \rightarrow +\infty$ dans la dernière inégalité obtenue en Q19

attention, bien remarquer que $x \in]0, 1]$, donc h' est constante sur $]0, 1]$ puis on conclut avec la périodicité de h'

formule $\sum_{n=1}^N \ln(X_n) = \ln \left(\prod_{n=1}^N X_n \right)$

donc

$$\sqrt{N+1} \frac{(2^N N!)^2}{(2N+1)!} = \frac{\sqrt{N+1} 2^{2N} (N!)^2}{2N+1 (2N)!} \underset{N \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\sqrt{N}}{2N} \frac{2^{2N} 2\pi N \left(\frac{N}{e}\right)^{2N}}{\sqrt{2\pi(2N)} \left(\frac{2N}{e}\right)^{2N}} \underset{N \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Par conséquent, en utilisant la question précédente, et par continuité de $\ln$ en $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n \left(\frac{1}{2}\right) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \ln \left[\exp \left(\sum_{n=1}^N u_n \left(\frac{1}{2}\right) \right) \right] = \lim_{N \rightarrow +\infty} \ln \left[\sqrt{N+1} \frac{(2^N N!)^2}{(2N+1)!} \right] = \ln \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2} \right)$$

Donc $\varphi \left(\frac{1}{2}\right) = -\ln \left(\frac{1}{2}\right) + \sum_{n=1}^{+\infty} u_n \left(\frac{1}{2}\right) = -\ln \left(\frac{1}{2}\right) + \ln \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)$

$$\begin{aligned} \psi(1) &= \varphi \left(\frac{1}{2}\right) + \underbrace{\varphi(1)}_{=0} - \frac{1}{2} \ln(\pi) = -\ln \left(\frac{1}{2}\right) + \sum_{n=1}^{+\infty} u_n \left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} \ln(\pi) \\ &= -\ln \left(\frac{1}{2}\right) + \ln \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right) - \frac{1}{2} \ln(\pi) = 0 \end{aligned}$$

Q24. Il s'agit de montrer que $\psi = \varphi$. Pour cela, il suffit de vérifier que ψ vérifie les conditions (C) d'après la question 21.

(i) ψ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ par composée et somme de fonctions $\mathcal{C}^1$, φ étant de classe $\mathcal{C}^1$.

(ii) Pour tout $x > 0$, en utilisant $\varphi \left(\frac{x}{2} + 1\right) - \varphi \left(\frac{x}{2}\right) = \ln \left(\frac{x}{2}\right)$:

$$\begin{aligned} \psi(x+1) - \psi(x) &= x \ln(2) + \varphi \left(\frac{x+1}{2}\right) + \varphi \left(\frac{x+2}{2}\right) - (x-1) \ln(2) - \varphi \left(\frac{x}{2}\right) - \varphi \left(\frac{x+1}{2}\right) \\ &= \ln(2) + \varphi \left(\frac{x+2}{2}\right) - \varphi \left(\frac{x}{2}\right) = \ln(2) + \underbrace{\varphi \left(\frac{x}{2} + 1\right) - \varphi \left(\frac{x}{2}\right)}_{=\ln\left(\frac{x}{2}\right)} = \ln(x) \end{aligned}$$

(iii) pour tout $x > 0$, $\psi'(x) = \ln(2) + \frac{1}{2}\varphi' \left(\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{2}\varphi' \left(\frac{x+1}{2}\right)$ et les fonctions φ' , $x \mapsto \frac{x}{2}$ et $x \mapsto \frac{x+1}{2}$ sont croissantes, donc par composée et somme de fonctions croissantes, ψ' est croissante sur $]0, +\infty[$.

(iv) $\psi(1) = 0$ d'après la question précédente.

ψ vérifie les conditions C donc par unicité d'une fonction vérifiant C, $\psi = \varphi$ soit :

$$\forall x \in]0, +\infty[, (x-1) \ln(2) + \varphi \left(\frac{x}{2}\right) + \varphi \left(\frac{x+1}{2}\right) = \varphi(x) + \frac{1}{2} \ln(\pi)$$

EXERCICE 3

Q25. Il faut avoir fait au moins 2 tirages pour observer un numéro déjà tiré précédemment, et au $n+1$ -ème tirage, la boule tirée aura nécessairement été déjà tirée : $T_n = \llbracket 2, n+1 \rrbracket$.

Q26. On a $Z(\Omega) = \llbracket 1, n \rrbracket^k$.

Soit $(a_1, \dots, a_k) \in \llbracket 1, n \rrbracket^k$. On a par indépendance des tirages :

$$\mathbb{P}(Z = (a_1, \dots, a_k)) = \mathbb{P}(X_1 = a_1, \dots, X_k = a_k) = \prod_{j=1}^k \mathbb{P}(X_j = a_j) = \prod_{j=1}^k \frac{1}{n} = \frac{1}{n^k}$$

Donc Z suit une loi uniforme sur $\llbracket 1, n \rrbracket^k$.

Q27. On a $\text{Card}(A) = n(n-1) \cdots (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$ (nombre de k -listes d'éléments distincts d'un ensemble à n éléments).

Explication rapide : n choix pour a_1 puis $n-1$ choix pour a_2 tel que $a_1 \neq a_2$, puis $n-2$ choix pour a_3

écrire un équivalent de $(2N)!$ plutôt que de $(2N+1)!$ permet d'éviter une étape de calcul

cours sur le dénombrement (PCSI)

Les évènements $(T_n > k)$ et $(Z \in A)$ sont clairement égaux :

si $T_n > k$ alors les k premiers tirages donnent des numéros 2 à 2 distincts donc $Z \in A$

si $Z \in A$, alors les k premiers tirages donnent des numéros 2 à 2 distincts donc $T_n > k$.

$$\text{Donc } \mathbb{P}(T_n > k) = \mathbb{P}(Z \in A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\llbracket 1, n \rrbracket^k)} = \frac{\frac{n!}{(n-k)!}}{n^k} = \frac{n!}{(n-k)! n^k}.$$

Q28. T_n est d'espérance finie car T_n est une variable aléatoire bornée (et même à support fini).

On a pour $k \geq n+1$, $\mathbb{P}(T_n > k) = 0$ car $T_n \leq n+1$, par conséquent la série $\sum_{k \geq 0} \mathbb{P}(T_n > k)$ est convergente et d'après le cours :

$$\mathbb{E}(T_n) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(T_n > k) = \sum_{k=0}^n \mathbb{P}(T_n > k) = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{(n-k)! n^k} = \sum_{\ell=0}^n \frac{n!}{(n-\ell)! n^\ell}$$

$$\mathbb{E}(T_n) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(T_n > k)$$

Q29. L'application $f_k : t \mapsto t^k e^{-t}$ est continue (et positive) sur $[0, +\infty[$.

De plus par croissance comparée $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^2 f_k(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} t^{k+2} e^{-t} = 0$ donc $f_k(t) = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$.

Et $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ donc f_k est intégrable en $+\infty$ et par conséquent l'intégrale $I_k = \int_0^{+\infty} f_k(t) dt$ est convergente.

Remarque : on peut aussi conclure en remarquant que $f_k(t) = o\left(e^{-t/2}\right)$.

exemple très classique à connaître

Q30. On procède par récurrence sur k :

• *initialisation* $k = 0$. $I_0 = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = 1 = 0!$.

• *hérédité* soit $k \in \mathbb{N}$. On suppose $I_k = k!$.

On pose $u(t) = t^{k+1}$ et $v(t) = -e^{-t}$; alors u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, +\infty[$

et $u'(t) = (k+1)t^k$ et $v'(t) = e^{-t}$.

Par croissance comparée $\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t)v(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} -t^{k+1}e^{-t} = 0$, et $u(0)v(0) = 0$; on peut donc procéder à l'intégration par parties suivante :

exemple très classique à connaître

$$I_{k+1} = \int_0^{+\infty} t^{k+1} e^{-t} dt = \underbrace{[u(t)v(t)]_0^{+\infty}}_{=0} - \int_0^{+\infty} -(k+1)t^k e^{-t} dt = (k+1)I_k \stackrel{H.R.}{=} (k+1)!$$

en utilisant l'hypothèse de récurrence pour la dernière égalité.

réduction intégration par parties

Conclusion : pour tout $k \in \mathbb{N}$, $I_k = k!$.

Q31. L'application $g_n = t \mapsto \left(1 + \frac{t}{n}\right)^n e^{-t}$ est continue positive sur $[0, +\infty[$

$\left(1 + \frac{t}{n}\right)^n \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n^n} t^n$ donc $g_n(t) = \mathcal{O}\left(t^n e^{-t}\right)$ or l'intégrale $I_n = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt$ est convergente,

donc par comparaison de fonctions positives l'intégrale $\int_0^{+\infty} \left(1 + \frac{t}{n}\right)^n e^{-t} dt$ est convergente.

Et par la formule du binôme de Newton et linéarité de l'intégrale :

on aurait pu rédiger la convergence par somme d'intégrales convergentes

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \left(1 + \frac{t}{n}\right)^n e^{-t} dt &= \int_0^{+\infty} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(\frac{t}{n}\right)^k e^{-t} dt = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} \int_0^{+\infty} t^k e^{-t} dt \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} \underbrace{I_k}_{=k!} = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{(n-k)! n^k} \stackrel{Q28}{=} \mathbb{E}(T_n) \end{aligned}$$

Q32. On effectue le changement de variable usuel $v = t - n$:

$$J_n = \int_n^{+\infty} \left(1 + \frac{t}{n}\right)^n e^{-t} dt = \int_0^{+\infty} \left(1 + \frac{v+n}{n}\right)^n e^{-v-n} dv = e^{-n} \int_0^{+\infty} \left(2 + \frac{v}{n}\right)^n e^{-v} dv$$

je considère (à tort?) le changement de variables tellement simple que je ne vérifie pas les hypothèses : classe $\mathcal{C}^1$, strictement monotone donc bijective de I sur J

Q33. En utilisant pour $v \in [0, +\infty[$ et $n \in \mathbb{N}^*$, $1 + \frac{v}{2n} \leq e^{\frac{v}{2n}}$:

$$0 \leq \left(1 + \frac{v}{2n}\right)^n \leq \left(e^{\frac{v}{2n}}\right)^n = e^{\frac{v}{2}}$$

donc par croissance de l'intégrale

$$0 \leq \int_0^{+\infty} \left(1 + \frac{v}{2n}\right)^n e^{-v} dv \leq \int_0^{+\infty} e^{\frac{v}{2}} e^{-v} dv = \int_0^{+\infty} e^{-\frac{v}{2}} dv = 2 \quad \text{donc } 0 \leq K_n \leq 2$$

Q34. On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par la question 32 :

$$J_n = e^{-n} \int_0^{+\infty} \left(2 + \frac{v}{n}\right)^n e^{-v} dv = e^{-n} 2^n \int_0^{+\infty} \left(1 + \frac{v}{2n}\right)^n e^{-v} dv = \left(\frac{2}{e}\right)^n K_n$$

Or $0 < \frac{2}{e} < 1$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{e}\right)^n = 0$ et (K_n) étant bornée d'après la question précédente :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} J_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{e}\right)^n K_n = 0$$

Remarque : on peut rédiger en écrivant l'encadrement, $0 \leq J_n \leq 2 \left(\frac{2}{e}\right)^n$, obtenu à partir de la question précédente, puis invoquer le théorème des gendarmes.

Q35. En effectuant le changement de variable $t = u\sqrt{n}$,

$$I_n = \int_0^n \left(1 + \frac{t}{n}\right)^n e^{-t} dt = \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{u}{\sqrt{n}}\right)^n e^{-u\sqrt{n}} \sqrt{n} du = \sqrt{n} \int_0^{\sqrt{n}} f_n(u) du$$

Et par la relation de Chasles

$$\int_0^{+\infty} f_n(u) du = \int_0^{\sqrt{n}} f_n(u) du + \underbrace{\int_{\sqrt{n}}^{+\infty} f_n(u) du}_{=0} = \int_0^{\sqrt{n}} f_n(u) du$$

D'où

$$I_n = \sqrt{n} \int_0^{\sqrt{n}} f_n(u) du = \sqrt{n} \int_0^{+\infty} f_n(u) du$$

Q36. Soit $u \in]0, \sqrt{n}[$. Le développement en série entière de $\ln(1+x)$ s'écrit :

$$\forall x \in]-1, 1[, \ln(1+x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k$$

En particulier pour $x = \frac{u}{\sqrt{n}} \in]0, 1[$,

$$\ln\left(1 + \frac{u}{\sqrt{n}}\right) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \left(\frac{u}{\sqrt{n}}\right)^k = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \frac{u^k}{n^{\frac{k}{2}}}$$

Donc

$$\ln(f_n(u)) = n \ln\left(1 + \frac{u}{\sqrt{n}}\right) - u\sqrt{n} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \frac{u^k}{n^{\frac{k}{2}-1}} - u\sqrt{n} = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \frac{u^k}{n^{\frac{k}{2}-1}}$$

Q37. Soit $u \in]0, \sqrt{n}[$. Notons pour $k \in \mathbb{N}^*$, $V_k = \frac{u^k}{kn^{\frac{k}{2}-1}} = \frac{n}{k} \left(\frac{u}{\sqrt{n}}\right)^k$.

La suite $(V_k)_{k \geq 1}$ est décroissante de limite nulle car $0 \leq \frac{u}{\sqrt{n}} < 1$ et :

- $V_{k+1} = \frac{n}{k+1} \left(\frac{u}{\sqrt{n}}\right)^{k+1} \leq \frac{n}{k} \left(\frac{u}{\sqrt{n}}\right)^k = V_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$;
- $\lim_{k \rightarrow +\infty} \left(\frac{u}{\sqrt{n}}\right)^k = 0$ d'où $\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{n}{k} \left(\frac{u}{\sqrt{n}}\right)^k = 0$.

il fallait penser à la majoration du reste d'une série alternée vérifiant le critère spécial

Donc la série $\sum_{k \geq 1} (-1)^{k-1} V_k$ est une série alternée vérifiant le critère spécial ; on a donc par majoration du reste :

$$\left| \ln(f_n(u)) + \frac{u^2}{2} \right| = \left| \sum_{k=3}^{+\infty} (-1)^{k-1} V_k \right| \leq |V_3| = \frac{u^3}{3\sqrt{n}}$$

Par conséquent, en utilisant $\frac{u}{\sqrt{n}} \leq 1$,

$$\ln(f_n(u)) \leq \frac{u^3}{3\sqrt{n}} - \frac{u^2}{2} = u^2 \left(\frac{u}{3\sqrt{n}} - \frac{1}{2} \right) \leq u^2 \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} \right) = \frac{-u^2}{6}$$

Q38. On applique le théorème de convergence dominée :

- soit $u \in]0, +\infty[$, en utilisant le développement $\ln\left(1 + \frac{u}{\sqrt{n}}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{u}{\sqrt{n}} - \frac{1}{2} \frac{u^2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$,

$$f_n(u) \underset{\sqrt{n} > u}{=} e^{n \ln\left(1 + \frac{u}{\sqrt{n}}\right) - u\sqrt{n}} = e^{-\frac{u^2}{2} + n o\left(\frac{1}{n}\right)} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} e^{-\frac{u^2}{2}}$$

La suite (f_n) converge simplement vers $u \mapsto e^{-\frac{u^2}{2}}$ sur $]0, +\infty[$;

- pour tout $u \in]0, +\infty[$, et $n \in \mathbb{N}^*$, en utilisant la question précédente pour le cas $u < \sqrt{n}$:

$$\begin{cases} |f_n(u)| = f_n(u) \leq e^{-\frac{u^2}{6}} & \text{si } u < \sqrt{n} \\ |f_n(u)| = f_n(u) = 0 & \text{si } u \geq \sqrt{n} \end{cases} \quad \text{donc } |f_n(u)| \leq e^{-\frac{u^2}{6}}$$

et $u \mapsto e^{-\frac{u^2}{6}}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ car elle est continue sur $[0, +\infty[$ et $e^{-\frac{u^2}{6}} \underset{u \rightarrow +\infty}{=} o(e^{-u})$.

Donc d'après le théorème de convergence dominée,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\int_0^{+\infty} f_n(u) \, du \right) = \int_0^{+\infty} \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(u) \right) \, du = \int_0^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} \, du$$

Q39. Par la question 31, et la définition de I_n et J_n :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathbb{E}(T_n) = I_n + J_n$$

De plus d'après les questions Q35 et Q38,

$$I_n = \sqrt{n} \int_0^{+\infty} f_n(u) \, du \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{n} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} \, du \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{n\pi}{2}}$$

De plus, d'après la question 34, $\lim_{n \rightarrow +\infty} J_n = 0$, donc $J_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(I_n)$ donc

$$\mathbb{E}(T_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{n\pi}{2}}$$

la seconde inégalité est une simple conséquence de la première