

Feuille d'exercices 14

ÉLÉMENTS DE CORRECTION

Exercice 2.

$$(a) D_f = D'_f = \mathbb{R}^*. \forall x \in D'_f, f'(x) = \frac{-4xe^{x^2}}{(e^{x^2} - 1)^2}.$$

$$(b) D_g = D'_g = \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[\cup (2\pi). \forall x \in D'_g, g'(x) = \left(\cos(x) \ln(\cos x) - \frac{\sin^2(x)}{\cos(x)} \right) (\cos x)^{\sin x}.$$

$$(c) D_h = [-1, 1], D'_h =] -1, 0[\cup] 0, 1[. \forall x \in D'_h, h'(x) = \frac{x}{|x|} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$(d) D_i = D'_i =] 0, \pi[\cup (\pi). \forall x \in D'_i, i'(x) = -\frac{1}{\sin(x)}.$$

$$(e) D_j = D'_j = \mathbb{R}. \forall x \in D'_j, j'(x) = \frac{1}{\operatorname{ch}(x)}.$$

$$(f) D_k = D'_k = \left] 0, \frac{\pi}{4} \right[\cup \left(\frac{\pi}{4} \right). \forall x \in D'_k, k'(x) = \frac{1 + \tan^2 x}{\tan x}.$$

$$(g) D_l = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}], D'_l =] -\sqrt{2}, 0[\cup] 0, \sqrt{2}[. \forall x \in D'_l, l'(x) = -\frac{2x}{\sqrt{2x^2 - x^4}}.$$

$$(h) D_m = \mathbb{R}, D'_m = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}. \forall x \in D'_m, m'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x} - [x]}.$$

$$(i) D_n = [-1, 1], D'_n =] -1, 1[. \forall x \in D'_n, n'(x) = \frac{1}{1 - x^2 + \sqrt{1 - x^2}}.$$

Exercice 3.

(d) La fonction j est 2π -périodique ; on l'étudie donc sur $[0, 2\pi]$. Sur cet intervalle, j est définie lorsque $\sin x \neq 0$, c'est-à-dire lorsque $x \neq 0$ ou π .

En 0 : $j(x) = x \frac{1 - \cos x}{x^2} \frac{x}{\sin x} \xrightarrow[x \rightarrow 0]{x \neq 0} 0$, donc j est prolongeable par continuité en 0 en une

fonction \tilde{j} telle que $\tilde{j}(0) = 0$.

En π : $j(x) \underset{x \rightarrow \pi}{\sim} \frac{2}{\sin x} \xrightarrow[x \rightarrow \pi]{x \neq \pi} \pm\infty$, donc j n'est pas prolongeable par continuité en π .

On a de plus en 0 : $\forall x \neq 0, \frac{\tilde{j}(x) - \tilde{j}(0)}{x - 0} = \frac{1 - \cos x}{x \sin x} = \frac{1 - \cos x}{x^2} \frac{x}{\sin x} \xrightarrow[x \rightarrow 0]{} \frac{1}{2}$, donc \tilde{j} est dérivable en 0 , avec $\tilde{j}'(0) = \frac{1}{2}$.

Exercice 4.

(a) La fonction f est dérivable lorsque $\sin x \neq 0$, c'est-à-dire sur $D'_f = \left] 0, \frac{\pi}{2} \right[$. On a : $\forall x \in D'_f, f'(x) = \frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}} + 1 > 0$, donc f est strictement croissante sur $\left] 0, \frac{\pi}{2} \right[$.

Comme f est de plus usuellement continue sur $\left] 0, \frac{\pi}{2} \right[$, d'après le théorème de la bijection monotone,

f réalise une bijection de $\left] 0, \frac{\pi}{2} \right[$ dans $J = \left[f(0), f\left(\frac{\pi}{2}\right) \right] = \left[0, \frac{\pi + 2}{2} \right]$.

- (b) Comme f' est définie et ne s'annule pas en tout point de $J \setminus \{0\}$, f^{-1} est dérivable sur $J \setminus \{0\}$.
En 0, f' n'est pas définie, mais :

$$\forall y \neq 0, \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(0)}{y - 0} \underset{x=f^{-1}(y)}{=} \frac{x}{f(x)} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{\frac{\sin x}{x}} + \sqrt{x}} \xrightarrow[\text{ie } x \rightarrow 0]{y \rightarrow 0} 0,$$

donc f^{-1} est dérivable en 0, avec $(f^{-1})'(0) = 0$.

Exercice 5.

- (c) Comme $\frac{1}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$, on applique le théorème des accroissements finis à \cos entre 1 et $\frac{\pi}{3}$: comme \cos est dérivable sur $\left[1, \frac{\pi}{3}\right]$, il existe $c \in \left]1, \frac{\pi}{3}\right[$ tel que $\frac{\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - \cos(1)}{\frac{\pi}{3} - 1} = \cos'(c) = -\sin(c)$,
donc : $\left|\cos(1) - \frac{1}{2}\right| \leq \frac{\pi}{3} - 1 \leq 0,05$.

Exercice 6. Soit T une période de f . On a : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x+T) = f(x)$, donc en dérivant : $f'(x+T) = f'(x)$; donc f' est également T -périodique. Comme f' est continue, d'après le théorème de Weierstrass, f' est bornée par un réel C sur $[0, T]$, donc sur \mathbb{R} . D'après l'inégalité des accroissements finis, f est donc C -lipschitzienne.

Exercice 9. Soit $d \in [a, b]$. La tangente en d à la courbe de f a pour équation cartésienne : $y = f'(d)(x - d) + f(d)$, donc passe par l'origine si et seulement si $0 = f(d) - df'(d) = -d^2 g'(d)$, où $g : x \mapsto \frac{f(x)}{x}$.
On a : $g(a) = g(b) = 0$, et g est dérivable sur $[a, b]$, donc, d'après le théorème de Rolle, il existe $c \in]a, b[$ tel que $g'(c) = 0$, c'est-à-dire tel que la tangente en c à la courbe de f passe par l'origine.

Exercice 12. Soient $a, b \in \mathbb{R}$. La fonction $f : x \mapsto e^{ix}$ a pour dérivée $f' : x \mapsto ie^{ix}$, donc f' est bornée (en module) par 1, donc, d'après l'inégalité des accroissements finis : $|f(b) - f(a)| \leq 1 \times |b - a|$.

Exercice 13.

- (a) Notons $g : x \mapsto x^2 + 1$ et $h : x \mapsto e^{3x}$. D'après la formule de Leibniz :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, f^{(n)}(x) &= g(x)h^{(n)}(x) + ng'(x)h^{(n-1)}(x) + \frac{n(n-1)}{2}g''(x)h^{(n-2)}(x) \\ &= 3^{n-2}(3^2(x^2+1) + 3 \times 2x + 2)e^{3x} \\ &= 3^{n-2}(9x^2 + 6x + 11)e^{3x}. \end{aligned}$$

- (b) On a : $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = \frac{1}{4}\cos(3x) + \frac{3}{4}\cos(x)$, donc $g^{(n)}(x) = \frac{3^n}{4}\cos^{(n)}(3x) + \frac{3}{4}\cos^{(n)}(x)$, où $\cos^{(n)} = \cos$ si $n = 4k$, $-\sin$ si $n = 4k + 1$, $-\cos$ si $n = 4k + 2$, \sin si $n = 4k + 3$.

- (c) D'après la formule de Leibniz : $\forall x \in \mathbb{R}, h^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \sin^{(k)}(x)e^x$.

- (d) D'après la formule de Leibniz :

$$\forall x \in \mathbb{R}, i^{(n)}(x) = (-1)^n e^{-x} ((x^3 + x^2 + 1) - n(3x^2 + 2x) + 3n(n-1)x - n(n-1)(n-2)).$$

- (e) $\forall x \neq -1, j(x) = \frac{2}{1+x} - 1$, donc $j^{(n)}(x) = 2 \times (-1)^n \frac{n!}{(1+x)^{n+1}}$.

$$(f) \forall x < \frac{2}{3}, k'(x) = \frac{3}{3x-2}, \text{ donc } k^{(n)}(x) = (-1)^{n+1} \frac{3^n(n-1)!}{(3x-2)^n}.$$

Exercice 16. La fonction f est usuellement de classe C^∞ en tout $x \in \mathbb{R}^*$.

En 0 : $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0 = f(0)$, donc f est continue en 0.
 $x \neq 0$

Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons f de classe C^n en 0. Alors : $\forall x < 0, f^{(n+1)}(x) = 0$ et : $\forall x > 0, f^{(n+1)}(x) = P_{n+1} \left(\frac{1}{x} \right) e^{-\frac{1}{x^2}}$ pour un certain polynôme P_{n+1} , donc, par croissances comparées : $f^{(n+1)}(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$.
 $x \neq 0$

Donc, d'après le théorème de la limite de la dérivée, $f^{(n)}$ est dérivable en 0 et $f^{(n+1)}$ est continue en 0; c'est-à-dire que f est de classe C^{n+1} en 0.

Par récurrence, f est donc de classe C^∞ en 0, donc sur \mathbb{R} .

Exercice 17. Comme $f(a) = f(b) = 0$ et que f est dérivable sur $[a, b]$, d'après le théorème de Rolle, il existe $c_1 \in]a, b[$ tel que $f'(c_1) = 0$.

Soit $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, supposons qu'il existe $c_k \in]a, b[$ tel que $f^{(k)}(c_k) = 0$. Alors $f^{(k)}(a) = f^{(k)}(c_k)$ et $f^{(k)}$ est dérivable sur $[a, b]$, d'après le théorème de Rolle, il existe $c_{k+1} \in]a, c_k[\subset]a, b[$ tel que $f^{(k+1)}(c_{k+1}) = 0$.

Par récurrence, il existe donc $c_n \in]a, b[$ tel que $f^{(n)}(c) = 0$.

Exercice 18. Notons n le degré de f et $g : x \mapsto f(x) - e^x$. La fonction g est usuellement de classe C^∞ sur \mathbb{R} et : $\forall x \in \mathbb{R}, g^{(n+1)}(x) = -e^x < 0$.

Supposons que g s'annule $n+2$ fois sur \mathbb{R} ; alors, d'après le théorème de Rolle, g' s'annule $n+1$ fois, puis g'' n fois, et par suite $g^{(n+1)}$ s'annule 1 fois sur \mathbb{R} , ce qui est absurde. Donc g s'annule au plus $n+1$ fois sur \mathbb{R} , c'est-à-dire que les courbes de f et \exp se croisent au plus $n+1$ fois.

Exercice 21. La fonction f est usuellement de classe C^∞ sur \mathbb{R} , avec : $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{e^x}{1+e^x} = \frac{1}{1+e^{-x}}$, puis $f''(x) = \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2} > 0$, donc f est convexe. Soient $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n > 0$. On a :

$$\begin{aligned} \left(\prod_{k=1}^n a_k \right)^{\frac{1}{n}} + \left(\prod_{k=1}^n b_k \right)^{\frac{1}{n}} &\leq \left(\prod_{k=1}^n (a_k + b_k) \right)^{\frac{1}{n}} &\Leftrightarrow & 1 + \left(\prod_{k=1}^n \frac{a_k}{b_k} \right)^{\frac{1}{n}} \leq \left(\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{a_k}{b_k} \right) \right)^{\frac{1}{n}} \\ & &\Leftrightarrow & 1 + \exp \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln \frac{a_k}{b_k} \right) \leq \exp \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln \left(1 + \frac{a_k}{b_k} \right) \right) \\ & &\Leftrightarrow & f \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln \frac{a_k}{b_k} \right) \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f \left(\ln \frac{a_k}{b_k} \right) \\ & &\Leftrightarrow & f \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k \right) \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(x_k) \end{aligned}$$

$x_k = \ln \frac{a_k}{b_k}$

où la dernière inégalité est vraie puisque f est convexe; donc, par équivalence, la formule voulue est vraie.

Exercice 22. Soient $x, y > 0$, notons $X = x^p$ et $Y = y^q$. Alors :

$$xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q} \Leftrightarrow X^{\frac{1}{p}} Y^{\frac{1}{q}} \leq \frac{X}{p} + \frac{Y}{q} \Leftrightarrow \frac{1}{p} \ln(X) + \frac{1}{q} \ln(Y) \leq \ln \left(\frac{X}{p} + \frac{Y}{q} \right),$$

où la dernière inégalité est vraie car \ln est concave sur \mathbb{R}_+^* . Donc, par équivalence : $xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}$.

Soient $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n > 0$. D'après l'inégalité précédente :

$$\sum_{k=1}^n a_k b_k \leq \sum_{k=1}^n \left(\frac{a_k^p}{p} + \frac{b_k^q}{q} \right) = \frac{1}{p} \sum_{k=1}^n a_k^p + \frac{1}{q} \sum_{k=1}^n b_k^q,$$

donc :

$$\ln \left(\sum_{k=1}^n a_k b_k \right) \leq \ln \left(\frac{1}{p} \sum_{k=1}^n a_k^p + \frac{1}{q} \sum_{k=1}^n b_k^q \right) \leq \frac{1}{p} \ln \left(\sum_{k=1}^n a_k^p \right) + \frac{1}{q} \ln \left(\sum_{k=1}^n b_k^q \right),$$

où la dernière égalité est à nouveau obtenue par concavité de \ln . D'où, par passage à l'exponentielle, la formule voulue.