Devoir à la maison n° 9
CORRIGÉ

Exercice 1.

1. (a) Notons $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$. On raisonne par analyse-synthèse :

- Supposons qu'il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $Q' = P$ et $\int_0^1 Q(t)dt = 0$.
Comme $Q' = P$, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $Q = Q_0 + \lambda$, où $Q_0 = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1} X^{k+1}$. Comme $\int_0^1 Q(t)dt = 0$, on a $\int_0^1 Q_0(t)dt + \int_0^1 \lambda dt = 0$, donc $\lambda = -\int_0^1 Q_0(t)dt$. Donc Q est unique.
- Réciproquement, soit $Q = Q_0 - \int_0^1 Q_0(t)dt$.
Alors $Q' = Q_0' = P$ et $\int_0^1 Q(t)dt = \int_0^1 Q_0(t)dt - \int_0^1 Q_0(t)dt = 0$. Donc Q existe.

Il existe donc un unique polynôme Q tel que tel que $Q' = P$, vérifiant $\int_0^1 Q(t)dt = 0$.

(b) On a $B_0 = 1$. D'après la question (a), B_1 existe et est unique. Donc, à nouveau d'après la question (a), B_2 existe et est unique. Par une récurrence immédiate, B_n existe et est unique pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Les B_n et les b_n sont respectivement appelés les polynômes *et les* nombres de Bernoulli, *en l'honneur du mathématicien suisse Jacques Bernoulli (1654-1705), fondateur de la dynastie mathématique du même nom.*

2. Par définition, on a : $\forall n \in \mathbb{N},\ \deg(B_{n+1}) = \deg(B_n) + 1$. Comme $\deg(B_0) = 0$, on a donc par une récurrence immédiate : $\forall n \in \mathbb{N},\ \deg(B_n) = n$.
- On sait que $B_0 = 1$, donc $b_0 = 1$.
- On a $B_1' = B_0 = 1$, donc $B_1 = X + \lambda$, où $\int_0^1 (t+\lambda)dt = 0$, donc $\lambda = -\int_0^1 tdt = -\frac{1}{2}$.
Donc $B_1 = X - \frac{1}{2}$ et $b_1 = -\frac{1}{2}$.
- On a $B_2' = 2B_1 = 2X - 1$, donc $B_2 = X^2 - X + \lambda$, où $\lambda = -\int_0^1 (t^2 - t)dt = -\left[\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{6}$.
Donc $B_2 = X^2 - X + \frac{1}{6}$ et $b_2 = \frac{1}{6}$.
- On a $B_3' = 3B_2 = 3X^2 - 3X + \frac{1}{2}$, donc $B_3 = X^3 - \frac{3}{2}X^2 + \frac{X}{2} + \lambda$, où $\lambda = -\int_0^1 \left(t^3 - \frac{3}{2}t^2 + \frac{t}{2}\right) dt = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = 0$.
Donc $B_3 = X^3 - \frac{3}{2}X^2 + \frac{X}{2}$ et $b_3 = 0$.

- On a $B_4' = 4B_3 = 4X^3 - 6X^2 + 2X$, donc $B_4 = X^4 - 2X^3 + X^2 + \lambda$, où $\lambda = -\dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3} = -\dfrac{1}{30}$.
  Donc $B_4 = X^4 - 2X^3 + X^2 - \dfrac{1}{30}$ et $b_4 = -\dfrac{1}{30}$.
- On a $B_5' = 5B_4 = 5X^4 - 10X^3 + 5X^2 - \dfrac{1}{6}$, donc $B_5 = X^5 - \dfrac{5}{2}X^4 + \dfrac{5}{3}X^3 - \dfrac{X}{6} + \lambda$, où $\lambda = -\dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{2} - \dfrac{5}{12} + \dfrac{1}{12} = 0$.
  Donc $B_5 = X^5 - \dfrac{5}{2}X^4 + \dfrac{5}{3}X^3 - \dfrac{X}{6}$ et $b_5 = 0$.

3. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a directement :

$$B_{n+1}(1) - B_{n+1}(0) = \int_0^1 B_{n+1}'(t)dt = \int_0^1 (n+1)B_n(t)dt = (n+1)\int_0^1 B_n(t)dt = 0.$$

(b) Pour $n = 0$, on a : $\displaystyle\sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} b_{0-k}X^k = 1 = B_0$, donc l'assertion est initialisée.

Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons l'assertion vraie au rang n. Alors $B_{n+1}' = (n+1)\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b_{n-k}X^k$, donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que :

$$B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \frac{n+1}{k+1}\binom{n}{k} b_{n-k}X^{k+1} + \lambda = \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k+1} b_{n-k}X^{k+1} + \lambda.$$

En particulier, $B_{n+1}(0) = \lambda$, donc, par définition, $\lambda = b_{n+1}$. Donc :

$$B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k+1} b_{n-k}X^{k+1} + b_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+1}{k} b_{n-k+1}X^k + b_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n}{k} b_{n+1-k}X^k.$$

Donc l'assertion est vraie au rang $n+1$. Donc l'assertion est héréditaire.
Par récurrence, l'assertion est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après les deux résultats précédents, on a :

$$b_{n+1} = B_{n+1}(0) = B_{n+1}(1) = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} b_{n+1-k} = b_{n+1} + (n+1)b_n + \sum_{k=2}^{n+1} \binom{n+1}{k} b_{n+1-k},$$

donc :

$$b_n = -\frac{1}{n+1}\sum_{k=2}^{n+1} \binom{n+1}{k} b_{n+1-k} \underset{k \leftarrow n+1-k}{=} -\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n+1}{k} b_k.$$

Ainsi : $b_6 = -\dfrac{1}{7}\left(\dbinom{7}{0}b_0 + \dbinom{7}{1}b_1 + \dbinom{7}{2}b_2 + \dbinom{7}{4}b_4\right) = -\dfrac{1}{7}\left(1 - \dfrac{7}{2} + \dfrac{21}{6} - \dfrac{35}{30}\right) = \dfrac{1}{42}$.

4. (a) Pour $n = 1$: $B_1(X+1) - B_1(X) = \left(X + 1 - \dfrac{1}{2}\right) - \left(X - \dfrac{1}{2}\right) = 1$, donc l'assertion est initialisée.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons l'assertion vraie au rang n. Alors :

$$\frac{1 \times B_{n+1}'(X+1)}{n+1} - \frac{B_{n+1}'(X)}{n+1} = nX^{n-1},$$

donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que :

$$B_{n+1}(X+1) - B_{n+1}(X) = (n+1)X^n + \lambda.$$

L'évaluation en 0 de cette égalité s'écrit : $\lambda = B_{n+1}(1) - B_{n+1}(0) = 0$ d'après 3.(a), donc : $B_{n+1}(X+1) - B_{n+1}(X) = (n+1)X^n$. L'assertion est donc héréditaire.
Par récurrence, l'assertion est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

(b) Soit $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$. D'après le résultat précédent, on a :

$$\forall k \in [\![0,n]\!], \quad B_{p+1}(k+1) - B_{p+1}(k) = (p+1)k^p.$$

La somme de ces égalités est télescopique, et s'écrit donc :

$$(p+1)S_p(n) = B_{p+1}(n+1) - B_{p+1}(0) = B_{p+1}(n+1) - b_{p+1}.$$

(c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On applique le résultat précédent, à l'aide des données de la question 2.
On retrouve des formules bien connues :

- $S_1(n) = \dfrac{1}{2}\left(B_2(n+1) - b_2\right) = \dfrac{(n+1)^2 - (n+1)}{2} = \dfrac{n(n+1)}{2}$,
- $S_2(n) = \dfrac{1}{3}\left(B_3(n+1) - b_3\right) = \dfrac{2(n+1)^3 - 3(n+1)^2 + (n+1)}{6} = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$,
- $S_3(n) = \dfrac{1}{4}\left(B_4(n+1) - b_4\right) = \dfrac{(n+1)^4 - 2(n+1)^3 + (n+1)^2}{4} = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$,
- $S_4(n) = \dfrac{1}{5}\left(B_5(n+1) - b_5\right) = \dfrac{6(n+1)^5 - 15(n+1)^4 + 10(n+1)^3 - (n+1)}{30}$
$$= \dfrac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}.$$

Exercice 2.

1. (a) Si r_2 devient r_1 et inversement :
   - $s_1 = r_2 + r_1 = r_1 + r_2$, donc s_1 ne change pas,
   - $s_2 = r_2 - r_1 = -(r_2 - r_1)$, donc s_2 est changé en son opposé. Donc s_2^2 ne change pas.

   Donc s_1 et s_2^2 sont symétriques en r_1, r_2.

   (b) On a directement $s_1 = \sigma_1$, et :

$$s_2^2 = (r_1 - r_2)^2 = r_1^2 - 2r_1r_2 + r_2^2 = (r_1+r_2)^2 - 4r_1r_2 = \sigma_1^2 - 4\sigma_2.$$

   De plus, on sait que $\sigma_1 = -\dfrac{b}{a}$ et que $\sigma_2 = \dfrac{c}{a}$. Donc :

$$s_1 = -\frac{b}{a} \quad \text{et} \quad s_2^2 = \left(-\frac{b}{a}\right)^2 - 4\frac{c}{a} = \frac{b^2 - 4ac}{a^2}.$$

   (c) Notons habilement $\Delta = b^2 - 4ac$, puis δ tel que $\delta^2 = \Delta$. Alors : $s_2 = \pm\dfrac{\delta}{a}$. On choisit $s_2 = \dfrac{\delta}{a}$ (on sait que le choix contraire correspond à l'échange de r_1 et r_2). On a donc :

$$\left\{\begin{array}{rcl} r_1 + r_2 & = & -\dfrac{b}{a} \\ r_1 - r_2 & = & \dfrac{\delta}{a} \end{array}\right., \quad \text{donc} \quad \left\{\begin{array}{rcl} r_1 & = & \dfrac{-b+\delta}{2a} \\ r_2 & = & \dfrac{-b-\delta}{2a} \end{array}\right..$$

2. (a) Tout échange de r_1, r_2, r_3 laisse s_1 invariant. Observons ce qui se passe pour s_2 et s_3 :

- $r_1 + jr_2 + j^2 r_3 = s_2$,
  $r_1 + j^2 r_2 + jr_3 = s_3$,
- $r_1 + jr_3 + j^2 r_2 = s_3$,
  $r_1 + j^2 r_3 + jr_2 = s_2$,
- $r_2 + jr_1 + j^2 r_3 = js_3$,
  $r_2 + j^2 r_1 + jr_3 = j^2 s_2$,
- $r_2 + jr_3 + j^2 r_1 = j^2 s_2$,
  $r_2 + j^2 r_3 + jr_1 = js_3$,
- $r_3 + jr_1 + j^2 r_2 = js_2$,
  $r_3 + j^2 r_1 + jr_2 = j^2 s_3$,
- $r_3 + jr_2 + j^2 r_1 = j^2 s_3$,
  $r_3 + j^2 r_2 + jr_1 = js_2$.

On constate bien que $s_2 s_3$ et $s_2^3 + s_3^3$ sont symétriques en r_1, r_2, r_3.

(b) On a directement $s_1 = \sigma_1$, et :

$$\begin{aligned}
s_2 s_3 &= (r_1 + jr_2 + j^2 r_3)(r_1 + j^2 r_2 + jr_3) \\
&= r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + (j + j^2)(r_1 r_2 + r_2 r_3 + r_3 r_1) \\
&= (\sigma_1^2 - 2\sigma_2) - \sigma_2 \\
&= \sigma_1^2 - 3\sigma_2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
s_2^3 + s_3^3 &= (r_1 + jr_2 + j^2 r_3)^3 + (r_1 + j^2 r_2 + jr_3)^3 \\
&= 2(r_1^3 + r_2^3 + r_3^3) - 3(r_1^2 r_2 + r_1^2 r_3 + r_2^2 r_1 + r_2^2 r_3 + r_3^2 r_1 + r_3^2 r_2) + 12 r_1 r_2 r_3 \\
&= 2(\sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3) - 3(\sigma_1\sigma_2 - 3\sigma_3) + 12\sigma_3 \\
&= 2\sigma_1^3 - 9\sigma_1\sigma_2 + 27\sigma_3.
\end{aligned}$$

Or : $\sigma_1 = -\dfrac{b}{a}$, $\sigma_2 = \dfrac{c}{a}$ et $\sigma_3 = -\dfrac{d}{a}$, donc :

$$s_1 = -\frac{b}{a}, \quad s_2 s_3 = \frac{b^2 - 3ac}{a^2} \quad \text{et} \quad s_2^3 + s_3^3 = \frac{-2b^3 + 9abc - 27a^2 d}{a^3}.$$

(c) Notons $B = s_2^3 + s_3^3$ et $C = s_2 s_3$. Alors s_2^3 et s_3^3 sont les racines du polynôme $X^2 - BX + C^3$, donc $s_2^3, s_3^3 = \dfrac{B \pm \delta}{2}$ où $\delta^2 = B^2 - 4C^3$. On choisit alors par exemple s_2 parmi les racines cubiques de $\dfrac{B - \delta}{2}$ (on sait que les 6 choix possibles correspondent aux échanges de r_1, r_2, r_3), puis on calcule $s_3 = \dfrac{C}{s_2}$.
On a ensuite :

$$\left\{\begin{aligned}
r_1 + r_2 + r_3 &= s_1 \\
r_1 + jr_2 + j^2 r_3 &= s_2 \\
r_1 + j^2 r_2 + jr_3 &= s_3
\end{aligned}\right. , \quad \text{donc} \quad \left\{\begin{aligned}
r_1 &= \frac{s_1 + s_2 + s_3}{3} \\
r_2 &= \frac{s_1 + j^2 s_2 + js_3}{3} \\
r_3 &= \frac{s_1 + js_2 + j^2 s_3}{3}
\end{aligned}\right. .$$

3. Lorsque P est de degré n, on peut de la même manière construire $s_1, \ldots, s_n$ de la forme : $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $s_k = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \omega_j r_j$ où $r_1, \cdots, r_n$ sont les racines de P et $\omega_1, \cdots, \omega_n$ est une permutation des racines $n^{\text{èmes}}$ de l'unité. On cherche alors des combinaisons des s_k symétriques en les r_k, puis on exprime les s_k en fonction des σ_k, que l'on sait exprimer en fonction des coefficients de P.

Cette méthode, due au mathématicien franco-italien Joseph-Louis Lagrange (1736-1813), est malheureusement vouée à l'échec pour tout $n \geq 5$, en raison de la structure même des groupes des permutations *de* 5 *éléments ou plus : ceux-ci sont* non résolubles. *Ce résultat, démontré par Évariste Galois (1811-1832) à la suite des travaux de Lagrange, est l'un des fondements de l'algèbre moderne.*

Exercice 3.

1. (a) On a directement $T_0 = \dfrac{\ell}{c_0}$. Dans le référentiel $\mathcal{R}$, pendant le parcours du laser, le train parcourt une distance horizontale vT, donc, d'après le théorème de Pythagore, la longueur du trajet du laser est égale à $\sqrt{\ell^2 + v^2T^2}$. Le temps de trajet vérifie donc $T = \dfrac{\sqrt{\ell^2 + v^2T^2}}{c}$.

   (b) On a d'après la question précédente $c^2T^2 = \ell^2 + v^2T^2$, donc :

$$T^2 = \frac{\ell^2}{c^2 - v^2} = \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \frac{\ell^2}{c^2} = \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} T_0^2.$$

   D'où la formule voulue.

   La théorie de la relativité restreinte fut proposée par Albert Einstein et Henri Poincaré en 1905, suite aux expériences d'Albert Michelson et Edward Morley. Le coefficient γ avait été introduit par Hendrik Lorentz dès 1904.

2. (a) On a $E - E_0 = (\gamma - 1)E_0 = \left(\left(1 - \dfrac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} - 1\right) E_0$, donc $E - E_0 \underset{\frac{v}{c}\to 0}{\sim} \dfrac{1}{2}\dfrac{v^2}{c^2}E_0$.

   (b) Comme $\dfrac{1}{2}\dfrac{v^2}{c^2}E_0 = \dfrac{1}{2}mv^2$, on obtient finalement : $E_0 = mc^2$.