Corrigé du DS6 (4h) : Mines +

• La rédaction, l'argumentation et la présentation matérielle entrent dans une part significative de la notation; vous devrez aussi respecter la terminologie et les règles d'usage en vigueur. Les résultats numériques seront encadrés et simplifiés.
• Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition; d'autres couleurs, excepté le vert et bleu clair ou turquoise, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats
• Ne pas utiliser de correcteur.
• Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.

1 Nombre de points fixes d'une permutation

Soit n un entier naturel non nul. On note $\mathcal{S}_n$ l'ensemble des permutations de l'intervalle entier $[\![1,n]\!] = \{1,2,\dots,n\}$, c'est-à-dire des bijections de $[\![1,n]\!]$ vers lui-même. Si $\sigma \in \mathcal{S}_n$ est une permutation, on appelle **point fixe** de σ tout entier $i[\![1,n]\!]$ tel que: $\sigma(i) = i$.
Une permutation $\sigma \in \mathcal{S}_n$ est appelée un **dérangement** si elle n'a aucun point fixe. Pour tout $n \geqslant 1$, on note d_n le nombre de dérangements de l'intervalle entier $[\![1,n]\!]$. Par convention, on pose: $d_0 = 1$.
On munit l'ensemble fini $\mathcal{S}_n$ de la probabilité uniforme notée P_n. Sur l'espace probabilisé fini $(\mathcal{S}_n, \mathrm{P}_n)$, on définit la variable aléatoire X_n telle que, pour tout $\sigma \in \mathcal{S}_n$, $X_n(\sigma)$ est le nombre de points fixes de la permutation σ.
On introduit enfin la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{d_n}{n!}x^n$, dont le rayon de convergence est noté R, et dont la somme sur l'intervalle de convergence $]-R,R[$ est notée s:

$$\forall x \in]-R,R[, \quad s(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d_n}{n!}x^n.$$

1. Rappeler le cardinal de $\mathcal{S}_n$. En déduire que $R \geq 1$.
Solution :
On doit savoir que $card(\mathcal{S}_n) = n!$.
Puis et pour tout $n \geq 1$, $|\dfrac{d_n}{n!}| \leq 1$ donc, par propriété des rayons de convergence, R est supérieur au rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geq 0} x^n$ dont on sait qu'il vaut 1■

2. Pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, montrer que le nombre de permutations de $[\![1,n]\!]$ ayant exactement k points fixes est $\dbinom{n}{k} d_{n-k}$.
En déduire que $\mathrm{P}_n(X_n = k) = \dfrac{d_{n-k}}{k!(n-k)!}$
Solution :
Notons M l'ensemble dont nous cherchons le cardinal.
Je propose une démonstration probabiliste (et non combinatoire qui est plus courte mais moins dans l'esprit du programme).
J_k est l'ensemble des parties de $[\![1,n]\!]$ à k éléments et J l'ensemble des parties de $[\![1,n]\!]$.
Pour toute partie A de $[\![1,n]\!]$, on note M_A l'ensemble des permutations de $[\![1,n]\!]$ admettant A comme ensemble de points fixes et par N_A l'ensemble des dérangements de $\overline{A}$.
La famille d'événements $(\sigma \in M_A)_A$ est un système complet d'événements et la formule des probabilités totales nous permet alors d'écrire que :
$\mathrm{P}(\sigma \in M) = \displaystyle\sum_{A\in J} \mathrm{P}(\sigma \in M | \sigma \in M_A)\mathrm{P}(\sigma \in M_A)$.

Compte tenu de la définition de M :
$P(\sigma \in M) = \sum_{A\in J_k} P(\sigma \in M|\sigma \in M_A)P(\sigma \in M_A)$.

Fixons $A \in J_k$, la probabilité conditionnelle $P(\sigma \in M|\sigma \in M_A)$ est égale à $P(\sigma_{\overline{A}} \in N_A) = \dfrac{d_{n-k}}{(n-k)!}$.

Ensuite $P(\sigma \in M_A) = \dfrac{\text{nombre de permutations ayant A comme ensemble de points fixes}}{n!} = \dfrac{(n-k)!}{n!}$.

Finalement et puisque le cardinal de J_k vaut $\binom{n}{k}$, il vient $P(\sigma \in M) = \binom{n}{k}\dfrac{d_{n-k}}{(n-k)!}\dfrac{(n-k)!}{n!} = \binom{n}{k}\dfrac{d_{n-k}}{n!}$. Mais directement $P(\sigma \in M) = \dfrac{card(M)}{n!}$ donc (et dans la douleur) $\boxed{card(M) = \binom{n}{k} d_{n-k}}$ □

Dès lors puisqu'on travaille avec la probabilité uniforme sur $\mathcal{S}_n$: $P_n(X_n = k) = \dfrac{card(M)}{n!} = \dfrac{d_{n-k}}{k!(n-k)!}$ ■

3. Montrer que:

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad s(x)e^x = \frac{1}{1-x}.$$

En déduire que $R = 1$.
Solution :
Le produit de Cauchy des séries entières $\sum_{n\geq 0} \dfrac{x^n}{n!}$ et $\sum_{n\geq 0} \dfrac{d_n}{n!} x^n$ possède un rayon de convergence au moins égal à $\min(+\infty, R) = R$.
Par ailleurs le corfficient d'indice n de ce produit de Cauchy vaut : $\sum_{k=0}^{n} \dfrac{d_{n-k}}{k!(n-k)!} = \sum_{k=0}^{n} P_n(X_n = k) = 1$, ce par Q2 et condition de cohérence de la variable aléatoire X_n et pour tout n. Il en résulte que notre produit de Cauchy est la série entière $\sum_{n\geq 0} x^n$ dont le rayon de convergence est 1 (donc $R \leq 1$) et sa somme (sur $]-1, 1[$) est $x \to \dfrac{1}{1-x}$ ■

4. En partant de la relation $(1-x)s(x) = e^{-x}$ pour tout $x \in]-1, 1[$, exprimer $\dfrac{d_n}{n!}$ pour n entier naturel, sous la forme d'une somme.
Solution :
Partons plutôt de $s(x) = \dfrac{e^{-x}}{1-x}$ (valable pour $x \in]-1, 1[$) et, avec un produit de Cauchy et l'unicité des coefficients d'une série entière, nous avons (pour tout n) $\boxed{d_n = n!(\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!})}$ ■

5. Montrer que la loi de la variable aléatoire X_n est donnée par:

$$\forall k \in [\![0, n]\!], \quad P_n(X_n = k) = \frac{1}{k!}\sum_{i=0}^{n-k} \frac{(-1)^i}{i!}.$$

Solution :
Evident avec Q2 et Q4 ■

6. Sur l'espace probabilisé fini $(\mathcal{S}_n, P_n)$, on définit, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, la variable aléatoire U_i telle que, pour tout $\sigma \in \mathcal{S}_n$, on ait $U_i(\sigma) = 1$ si $\sigma(i) = i$, et $U_i(\sigma) = 0$ sinon. Montrer que U_i suit une loi de Bernoulli de paramètre $\dfrac{1}{n}$. Montrer que, si $i \neq j$, la variable U_iU_j suit une loi de Bernoulli dont on précisera le paramètre.
Solution :
i étant fixé, l'événement $(U_i = 1)$ admet comme probabilité $\dfrac{\text{cardinal de l'ensemble des permuations fixant i}}{n!} = \dfrac{(n-1)!}{n!} = 1/n$ donc $U_i \hookrightarrow \mathcal{B}(1/n)$ □

Si j est un entier différent de i (ce qui suppose que $n \geq 2$), nous avons déjà que U_iU_j est bien à valeurs dans $\{0,1\}$ et de façon similaire $\mathrm{P}_n(U_iU_j = 1) = \dfrac{(n-2)!}{n!} = \dfrac{1}{n(n-1)}$ donc $U_iU_j \hookrightarrow \mathcal{B}(\dfrac{1}{n(n-1)})\square$

7. Exprimer X_n à l'aide des U_i pour $i \in [\![1,n]\!]$. En déduire l'espérance $\mathrm{E}(X_n)$ et la variance $\mathrm{V}(X_n)$.
   Solution :
   Par construction même $\boxed{X_n = \sum_{i=1}^{n} U_i}$.
   La linéarité de l'espérance mathématique donne $\boxed{E(X_n) = n \times \dfrac{1}{n} = 1}$. Autrement dit en moyenne autour d'un point fixe, ce que confirmera la variance.
   On commence par observer que, pour $i \neq j$, $cov(U_i, Uj) = \dfrac{1}{n(n-1)} - \dfrac{1}{n^2}$ et sachant que $V(X_n) = V(\sum_{i=1}^{n} U_i) = \sum_{i=1}^{n} V(U_i) + \sum_{i \neq j} cov(U_i, U_j)$, il vient $V(X_n) = n\dfrac{1}{n}(1 - \dfrac{1}{n}) + n(n-1)(\dfrac{1}{n(n-1)} - \dfrac{1}{n^2}) = 1$.
   Ce dernier calcul n'étant valable que pour $n \geq 2$ mais il est évidemment valable et directement pour $n = 1$. On peut donc affirmer que les X_n sont réduites$\blacksquare$

8. Dans cette question, on fixe un entier naturel k. Déterminer:
   $$y_k = \lim_{n \to +\infty} \mathrm{P}_n(X_n = k).$$
   Soit Y une variable aléatoire sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$, à valeurs dans $\mathbb{N}$, et vérifiant:
   $$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{P}(Y = k) = y_k.$$
   Reconnaître la loi de Y.
   Solution :
   On a sans peine : $\boxed{y_k = \dfrac{e^{-1}}{k!}}$, ce pour tout k.
   Ainsi $Y \hookrightarrow \mathcal{P}(1)\blacksquare$

9. On note G_{X_n} et G_Y les fonctions génératrices respectives des variables X_n et Y de la question précédente. Exprimer $G_{X_n}(s)$ sous forme de somme, pour s réel, et vérifier que:
   $$\forall s \in \mathbb{R}, \quad \lim_{n \to +\infty} G_{X_n}(s) = G_Y(s).$$
   Solution :
   Pour $n \geq 1$ et tout réel s que l'on fixe, $G_{X_n}(s) = \sum_{k=0}^{\infty} v_k(n)$, où $v_k(n) = \dfrac{s^k}{k!}(\sum_{i=0}^{n_k} \dfrac{(-1)\hat{\imath}}{i!})$ si $k \leq n$ et $v_k(n) = 0$ si $k > n$.
   On considère donc une série de fonctions dont la variable décrit $\mathbb{N}^*$(on pourrait définir les v_k sur $[1, +\infty[$ en les prenant nulles ailleurs que sur les entiers et elles y seraient alors continues par morceaux).
   On observe que, à k fixé, (cf question précédente) $v_k(n) \underset{n\to\infty}{\to} y_k$.
   Ensuite on remarque que, pour tout $(k,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$, $|v_k(n)| \leq \dfrac{e|s|^k}{k!}$, ce qui montre que la série de fonctions $\sum_{k \geq 0} v_k$ converge normalement sur $\mathbb{N}^*$.
   Il nous est désormais d'utiliser le théorème de la double limite qui stipule que :
   $G_n(s) = \sum_{k=0}^{\infty} v_k(n) \underset{n\to\infty}{\to} \sum_{k=0}^{\infty} \lim_{n\to\infty} v_k(n)$
   Soit le résultat attendu$\blacksquare$

2 Convergence en variation totale

Dans la suite du problème, on appelle **distribution (de probabilités) sur** $\mathbb{N}$ toute application $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+$ telle que:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} x(k) = 1.$$

On note $\mathcal{D}_{\mathbb{N}}$ l'ensemble des distributions de probabilités sur $\mathbb{N}$.

Si x et y sont deux distributions sur $\mathbb{N}$, on définit la **distance en variation totale** entre x et y par:

$$\mathrm{d}_{VT}(x, y) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{+\infty} |x(k) - y(k)|.$$

10. Soient x, y, z trois distributions sur $\mathbb{N}$. Prouver les propriétés:

$$\begin{aligned} & 0 \leqslant \mathrm{d}_{VT}(x, y) \leqslant 1\,; \\ & \mathrm{d}_{VT}(x, y) = 0 \iff x = y\,; \\ & \mathrm{d}_{VT}(y, x) = \mathrm{d}_{VT}(x, y)\ ; \\ & \mathrm{d}_{VT}(x, z) \leqslant \mathrm{d}_{VT}(x, y) + \mathrm{d}_{VT}(y, z)\,. \end{aligned}$$

Solution :
Vérification immédiate■
Si X est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$, on note p_X la distribution de probabilités de X. Ainsi, p_X est l'application de X dans $\mathbb{R}_+$ définie par:

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad p_X(k) = \mathrm{P}(X = k).$$

Il est clair que $p_X \in \mathcal{D}_{\mathbb{N}}$.

En particulier, si λ est un réel strictement positif, on appelle **distribution de Poisson de paramètre** λ l'application $\pi_\lambda : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+$ telle que:

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \pi_\lambda(k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}.$$

11. Soient X et Y deux variables de Bernoulli, ayant respectivement pour paramètres $\lambda \in]0, 1[$ et $\mu \in]0, 1[$. Calculer $\mathrm{d}_{VT}(p_X, p_Y)$.
Solution :
On trouve $\boxed{|\lambda - \mu|}$■

12. Soit X une variable de Bernoulli de paramètre $\lambda \in]0, 1[$. Montrer que:

$$\mathrm{d}_{VT}(p_X, \pi_\lambda) = \lambda \left(1 - e^{-\lambda}\right).$$

En déduire que:

$$\mathrm{d}_{VT}(p_X, \pi_\lambda) \leqslant \lambda^2.$$

Solution :
On note pour simplifier d le nombre à calculer puis à majorer.
Par définition $2d = e^{-\lambda} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} + |1 - \lambda - e^{-\lambda}| + |\lambda - \lambda e^{-\lambda}|$ puis (avec inégalité de convexité pour la première valeur absolue)
$2d = e^{-\lambda}(e^{\lambda} - 1 - \lambda) + e^{-\lambda} + \lambda - 1 + \lambda(1 - e^{-\lambda}) = 2\lambda(1 - e^{-\lambda})$□ La majoration s'obtient à nouveau par convexité de l'exponentielle■

On considère de nouveau les variables aléatoires X_n introduites dans la partie 1. Les questions 8 et 9 semblent montrer une certaine convergence des lois des variables X_n vers la loi de Poisson de paramètre 1. Le but de la fin de cette partie est de montrer que (si $n \to +\infty$):

$$\mathrm{d}_{VT}(p_{X_n}, \pi_1) \longrightarrow 0,$$

et que cette convergence est assez rapide.

13. Vérifier la relation, pour tout n entier naturel non nul:

$$2\mathrm{d}_{VT}\left(p_{X_n}, \pi_1\right) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\left|\sum_{i=n-k+1}^{+\infty} \frac{(-1)^i}{i!}\right| + e^{-1}\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!}.$$

Solution :
Avec la même simplification et par définition :
$2d = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}|e^{-1} - \sum i = 0^{n-k}\frac{(-1)^i}{i!}| + e^{-1}\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k!}$
soit en notant ρ_m le reste d'ordre m de la série exponentielle, spécialisée en 1
$2d = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}|\rho_{n-k}| + e^{-1}\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k!}$■

14. Pour tout n entier naturel, on pose $r_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!}$. Prouver la majoration:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad r_n \leqslant \frac{1}{(n+1)!}\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+2)^k}.$$

En déduire un équivalent simple de r_n lorsque n tend vers $+\infty$.
Solution :
Pour $j \geq n+1$, $j! = (n+1)!\displaystyle\prod_{i=n+2}^{j} i \geq (n+1)!\prod_{i=n+2}^{j}(n+2) = (n+1)!(n+2)^{j-n-1}$ donc $r_n \leq$ $(n+1)!\displaystyle\sum_{j=n+1}^{\infty}(n+2)^{j-n-1} = \frac{1}{(n+1)!}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(n+2)^k}$, après changement d'indice□
En reconnaissant dans le majorant une somme de série géométrique : $r_n \leq \dfrac{1}{(n+1)!}(\dfrac{1}{1-1/n+2}) =$ $\dfrac{1}{(n+1)!}\dfrac{n+2}{n+1}$.
Comme par ailleurs $r_n \geq \dfrac{1}{(n+1)!}$, les gendarmes délivrent $\boxed{r_n \sim \dfrac{1}{(n+1)!}}$■

15. En continuant de majorer le second membre de l'égalité de la question 13, établir l'estimation (si $n \to \infty$)

$$\mathrm{d}_{VT}\left(p_{X_n}, \pi_1\right) = O\left(\frac{2^n}{(n+1)!}\right).$$

On pourra faire intervenir les coefficients binomiaux.
Solution :
Dans ce qui suit $n \to \infty$.
L'estimation précédente montre déjà que $r_n = O(\dfrac{2^n}{(n+1)!})$.
Il nous suffit de vérifier que $t_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\left|\sum_{i=n-k+1}^{+\infty}\frac{(-1)^i}{i!}\right| = O(\frac{2^n}{(n+1)!})$.
La partie subsidiaire du théorème de Leibniz sur les séries alternées dit que $\left|\displaystyle\sum_{i=n-k+1}^{+\infty}\frac{(-1)^i}{i!}\right| \leq \frac{1}{(n-k+1)!}$
donc que $|t_n| \leq \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!(n-k+1)!} = \frac{1}{(n+1)!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k} \leq \frac{2^{n+1}}{(n+1)!}$; il en résulte l'estimation en vue■

3 Autres estimations de distances en variation totale

Si x et y sont deux distributions de probabilités sur $\mathbb{N}$, on définit l'application $x * y : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+$ par:

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad (x * y)(k) = \sum_{i=0}^{k} x(i)y(k-i) = \sum_{i+j=k} x(i)y(j).$$

16. Montrer que $x * y$ est une distribution sur $\mathbb{N}$.
Solution :
Les séries $\sum_{k\geq 0} x(k)$ et $\sum_{k\geq 0} y(k)$ sont convergentes et à termes positifs et de somme égale à 1, leur produit de cauchy est une STP CV et de somme 1. D'où le résultat■

17. Soient X et Y des variables aléatoires indépendantes, à valeurs dans $\mathbb{N}$, définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$. Prouver la relation:

$$p_{X+Y} = p_X * p_Y.$$

Solution :
Il suffit de passer par les fonctions génératrices. Voir votre cours■

18. Soit $(x, y, u, v) \in (\mathcal{D}_{\mathbb{N}})^4$. Montrer que, pour tout k entier naturel:

$$|(x*y)(k) - (u*v)(k)| \leqslant \sum_{i+j=k} y(j)|x(i) - u(i)| + \sum_{i+j=k} u(i)|y(j) - v(j)|.$$

Solution :
Pour tout couple d'entiers naturels (i, j), on a :
$x(i)y(j) - u(i)v(j) = y(j)(x(i) - u(i)) + u(i)(y(j) - v(j))$. L'inégalité triangulaire classique donne accès au but■

19. Avec les notations de la question précédente, établir l'inégalité:

$$\mathrm{d}_{VT}(x*y, u*v) \leqslant \mathrm{d}_{VT}(x, u) + \mathrm{d}_{VT}(y, v).$$

Solution :
En reconnaissant en $\sum_{i+j=k} y(j)|x(i) - u(i)|$ et en $\sum_{i+j=k} u(i)|y(j) - v(j)|$ les termes d'indice k des produits de Cauchy des séries $\sum_{i\geq 0} y(i)$ et $\sum_{i\geq 0} |x(i) - u(i)|$ puis de $\sum_{i\geq 0} u(i)$ et $\sum_{i\geq 0} |y(i) - v(i)|$, il vient avec la question précédente :
$\mathrm{d}_{VT}(x*y, u*v) \leqslant \sum_{i=0}^{\infty} y(i) \times \mathrm{d}_{VT}(x, u) + \sum_{i=0}^{\infty} u(i)\mathrm{d}_{VT}(y, v) = \mathrm{d}_{VT}(x, u) + \mathrm{d}_{VT}(y, v)$■

20. Soit U une variable binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et $\lambda \in]0, 1[$. Prouver:

$$\mathrm{d}_{VT}(p_U, \pi_{n\lambda}) \leqslant n\lambda^2.$$

Solution :
Le mieux est de procéder par récurrence.
Pour $n = 1$, Q12 valide l'hérédité.
On suppose la formule vérifiée au rang n et si $V \hookrightarrow \mathcal{B}(n+1, \lambda)$ alors on peut écrire que $V = U + W$, où $U \hookrightarrow \mathcal{B}(n, \lambda)$ et $W \hookrightarrow \mathcal{B}(\lambda)$.
Dès lors $\mathrm{d}_{VT}\left(p_V, \pi_{(n+1)\lambda}\right) = \mathrm{d}_{VT}(p_U * p_W, \pi_{n\lambda} * \pi_\lambda)$ donc en utilisant la question précédente et HR ainsi que Q12:
$\mathrm{d}_{VT}\left(p_V, \pi_{(n+1)\lambda}\right) \leq n\lambda^2 + \lambda^2 = (n+1)\lambda^2$; la récurrence se poursuit bien■

21. Soit α un réel strictement positif. Pour tout entier naturel n tel que: $n > \lfloor \alpha \rfloor$, on note B_n une variable binomiale de paramètres n et $\dfrac{\alpha}{n}$. Pour tout k entier naturel, déterminer:

$$\lim_{n\to+\infty} \mathrm{P}(B_n = k).$$

On pourra utiliser la question précédente.

Solution :

Ce résultat se démontre directement (et de façon élémentaire) voir compléments donnés sur les lois usuelles. Mais cette approche ne mesure pas la vitesse de convergence (en loi) de la loi binomiale converge vers la loi de Poisson.

Uilisons donc la question précédente avec $\lambda = \dfrac{\alpha}{n}$ et fixons l'entier naturel k. Pour n assez grand :

$\dfrac{1}{2}|\mathrm{P}(B_n = k) - e^{-\alpha}\dfrac{\alpha^k}{k!}| \leq \mathrm{d}_{VT}\,(p_{B_n}, \pi_\alpha) \leq n(\dfrac{\alpha}{n})^2$, ainsi

$|\mathrm{P}(B_n = k) - e^{-\alpha}\dfrac{\alpha^k}{k!}| \leq \dfrac{2\alpha^2}{n}$, ce qui répond à nos aspirations en terme d'estimation de vitesse de convergence et reprouve que $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{P}(B_n = k) = e^{-\alpha}\dfrac{\alpha^k}{k!}}$ ■

L'inégalité prouvée (on trouve aussi dans la littérarture une version plus faible avec $\dfrac{4\alpha^2}{n}$) se nomme $\boxed{\text{l'inégalité de Le Cam}}$.

22. Soient α et β deux réels strictement positifs. En utilisant les résultats et les méthodes qui précèdent, montrer que:

$$\mathrm{d}_{VT}\,(\pi_\alpha, \pi_\beta) \leqslant |\beta - \alpha|.$$

Solution :

On conserve les notations précédentes auxquelles on ajoute C_n une varaiable binomiale de paramètre n et $\dfrac{\beta}{n}$. Dès lors, pour tout $n \geq 1$ et par inégalité triangulaire :

$\mathrm{d}_{VT}\,(\pi_\alpha, \pi_\beta) \leq \mathrm{d}_{VT}\,(\pi_\alpha, p_{B_n}) + \mathrm{d}_{VT}\,(p_{B_n}, p_{C_n}) + \mathrm{d}_{VT}\,(\pi_\beta, p_{C_n})$

On peut voir B_n (resp. C_n) comme somme de n variables de Bernoulli indépendantes de paramètre $\dfrac{\alpha}{n}$ (resp.$\dfrac{\beta}{n}$), ainsi avec Q11 et Q19, nous avons aussi $\mathrm{d}_{VT}\,(p_{B_n}, p_{C_n}) \leq n|\dfrac{\alpha}{n} - \dfrac{\beta}{n}| = |\alpha - \beta|$ et puisque les deux autres termes du majorant de notre inégalité triangulaire convergent vers 0 si $n \to \infty$ (cf Q21), nous obtenons par conservation des inégalités à la limite, le résultat souhaité■

Fin du problème