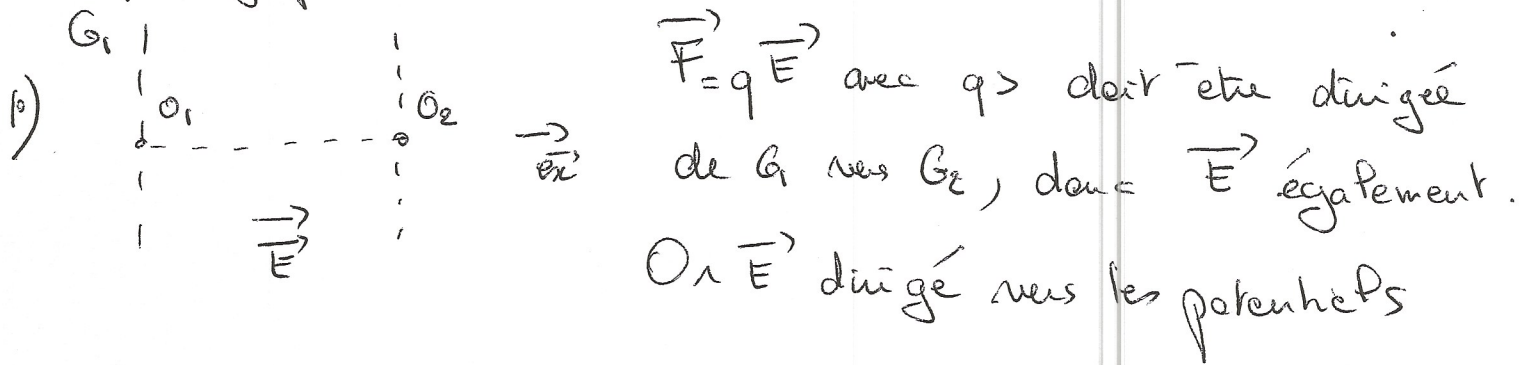


Conigé TD particules Chargées.

Ex 1.

Spectrographe de masse.



décroissants : $V_{G_1} - V_{G_2} > 0$ et $\vec{E} = E\vec{e}_x$ avec $E > 0$.

2) $\frac{1}{2} m v_{O_2}^2 - \frac{1}{2} m v_{O_1}^2 = q \cdot E \cdot l = E_p(O_1) - E_p(O_2) = qV_{G_1} - qV_{G_2}$

permet de retrouver $E = \frac{V_{G_1} - V_{G_2}}{l}$

et $\frac{1}{2} m v_{O_2}^2 = q(V_{G_1} - V_{G_2})$

ion 1 de masse m_1
" 2 " " m_2

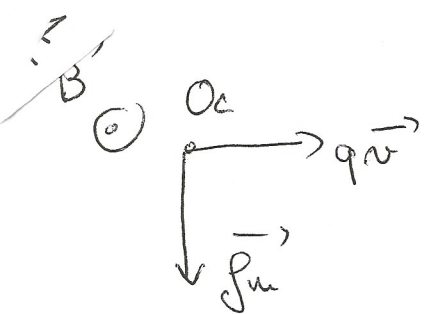
$$v_1 = \sqrt{\frac{2q(V_{G_1} - V_{G_2})}{m_1}}$$

$$v_2 = \sqrt{\frac{2q(V_{G_1} - V_{G_2})}{m_2}}$$

~~3~~ Déviation des ions.

1) $\vec{f}_m = q\vec{v} \wedge \vec{B}$ doit être dirigée vers le bas et

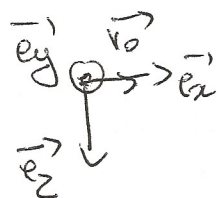
$(q\vec{v}, \vec{B}, \vec{f}_m)$ doit former un trièdre direct.



donc $\vec{B}$ doit être "sortant"

2

On choisit alors le trièdre direct : $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$.



2°) $\vec{v}_0$ est dirigé suivant $\vec{e}_x$ et $\vec{f}_m$ suivant $\vec{e}_z \Rightarrow$ trajectoire ds le plan (xz).

$$dE_c = \delta W_{F_m} = (\underbrace{q\vec{v} \wedge \vec{B}}_{\perp \vec{v}}) \cdot \frac{\vec{v} dt}{dt} = 0 \Rightarrow \|\vec{v}\| = v_0 = \text{cte.}$$

$$\begin{aligned} \vec{O_M} &= x\vec{e}_x + z\vec{e}_z \Rightarrow \vec{r} \wedge \vec{B} = \begin{vmatrix} \ddot{x} & 0 \\ 0 & B \\ \ddot{z} & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{x}B \end{pmatrix} \\ \vec{v} &= \dot{x}\vec{e}_x + \dot{z}\vec{e}_z \\ \vec{a} &= \ddot{x}\vec{e}_x + \ddot{z}\vec{e}_z \end{aligned}$$

PFD : $m\vec{a} = \vec{f}_m$

$$\begin{aligned} \text{par } \vec{e}_x & \quad (1) \quad \ddot{x} = -\omega_c \ddot{z} \quad \text{avec } \omega_c = \frac{qB}{m} \\ \text{par } \vec{e}_z & \quad (2) \quad \ddot{z} = +\omega_c \ddot{x} \end{aligned}$$

C.I. à $t=0$ $\begin{cases} x=y=0 \\ \dot{x}=v_0 \\ \dot{z}=0 \end{cases}$

(2) $\rightarrow \ddot{z} = \omega_c x + \text{cte.} \rightarrow \ddot{z} = \omega_c x$ car $\ddot{z} = 0$ à $t=0$. $\vec{a}$ repère ds (1)

d'aut $\ddot{x} + \omega_c x = 0 \rightarrow \begin{cases} x(t) = A \cos \omega_c t + B \sin \omega_c t \\ t=0 \quad x=0 \rightarrow A=0 \\ \dot{x}=v_0 \rightarrow v_0 = B \omega_c \end{cases}$

d'au $\boxed{x(t) = \frac{v_0}{\omega_c} \sin \omega_c t}$

13

$\ddot{z} = \omega_c x = v_0 \sin \omega_c t \rightarrow z(t) = -\frac{v_0}{\omega_c} \cos \omega_c t + \text{cte}$

à $t=0$ $z=0 \Rightarrow \text{cte} = \frac{v_0}{\omega_c}$

d'au $\boxed{z(t) = \frac{v_0}{\omega_c} (1 - \cos \omega_c t)}$ | On pose $R = \frac{v_0}{\omega_c}$

On obtient : $\left(\frac{x}{R}\right)^2 + \left(\frac{z}{R} - 1\right)^2 = 1 \rightarrow \boxed{x^2 + (z-R)^2 = R^2}$

Cercle de rayon $R > 0$ et de centre $\begin{cases} x_c = 0 \\ z_c = R \end{cases}$

$\boxed{R = \frac{1}{B} \sqrt{\frac{2mU}{q}}}$

ion de masse m_1

$\boxed{R_1 = \frac{1}{B} \sqrt{\frac{2m_1 U}{e}}}$

ion de masse m_2

$\boxed{R_2 = \frac{1}{B} \sqrt{\frac{2m_2 U}{e}}}$

4°] $\frac{A_2}{A_1} = \frac{m_2}{m_1} = \frac{R_2^2}{R_1^2}$

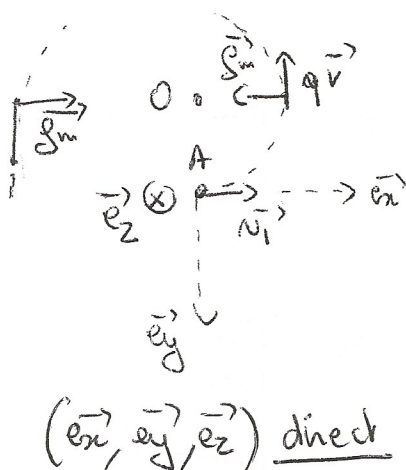
5°] $OT_1 = 2R_1 = 103,0 \text{ cm}$
 $OT_2 = 2R_2 = 105,6 \text{ cm}$

$A_1 = 39 \rightarrow A_2 = 39 \left(\frac{105,6}{103,0}\right)^2 = 41,3$

6°] si $\vec{v_0}$ n'est plus $\perp$ à $\vec{B}$: Trajectoire hélice d'axe $\vec{B}$

II Pour d'un pôle de la cycloïde.

(4)



1) $dE_c = dW_j = 0$ car $q\vec{v} \wedge \vec{B} \perp d\vec{r} = \vec{v} dt$.
 $\Rightarrow E_c = \text{cte} \Rightarrow \|\vec{v}\| = \text{cte}$ est infime.

2)

3) $m\vec{a} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$ PFD

$$\begin{cases} \vec{O}\vec{N} = x(t)\vec{e}_x + y(t)\vec{e}_y \\ \vec{v} = \dot{x}(t)\vec{e}_x + \dot{y}(t)\vec{e}_y \\ = v_x(t)\vec{e}_x + v_y(t)\vec{e}_y \\ \vec{a} = \dot{v}_x(t)\vec{e}_x + \dot{v}_y(t)\vec{e}_y \end{cases}$$

et $\begin{cases} v_x = v_1 \\ v_y = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} x=0 \\ y=a \end{matrix}$

Rq origine des coordonnées prise en A.

$$q\vec{v} \wedge \vec{B} = q(v_x\vec{e}_x + v_y\vec{e}_y) \wedge B\vec{e}_z = -qv_x B\vec{e}_y + qv_y B\vec{e}_x$$

$\Rightarrow$ En projetant le PFD

$$\begin{cases} m\dot{v}_x = qv_y B \\ m\dot{v}_y = -qv_x B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{v}_x = \frac{qB}{m} v_y \\ \dot{v}_y = -\frac{qB}{m} v_x \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{v}_x = \omega_c v_y \\ \dot{v}_y = -\omega_c v_x \end{cases}$$

4) $\dot{x} = \omega_c y \Rightarrow \dot{x} = \omega_c y + \text{cte} = \omega_c y + v_1$
 $\dot{y} = -\omega_c x \Rightarrow \dot{y} = -\omega_c (\omega_c y + v_1)$

$$\ddot{y} + \omega_c^2 y = -\omega_c v_1 \Rightarrow y(t) = A \cos \omega_c t + B \sin \omega_c t - \frac{v_1}{\omega_c}$$

à $t=0$ $y=0 \Rightarrow A - \frac{v_1}{\omega_c} = 0 \Rightarrow y(t) = \frac{v_1}{\omega_c} (\cos \omega_c t - 1)$
 $\dot{y}=0 = B$

d'o $\dot{x}(t) = \frac{v_1}{\omega_c} (\cos \omega_c t - 1) + v_1 = v_1 \cos \omega_c t \Rightarrow x(t) = + \frac{v_1}{\omega_c} \sin \omega_c t + \text{cte}$

à $t=0$ $x=0 \Rightarrow \text{cte} = 0$

$$\begin{cases} x(t) = \frac{v_1}{\omega_c} \sin \omega_c t \\ y(t) = \frac{v_1}{\omega_c} (\cos \omega_c t - 1) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{x(t)}{\frac{v_1}{\omega_c}} \right)^2 + \left(\frac{y}{\frac{v_1}{\omega_c}} + 1 \right)^2 = 1$$

$$x^2 + \left(y + \frac{v_1}{\omega_c} \right)^2 = \left(\frac{v_1}{\omega_c} \right)^2 \Rightarrow$$

Cercle de centre $\begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = -\frac{v_1}{\omega_c} \end{cases}$ et de rayon $\frac{v_1}{\omega_c}$.

$$5.) R_N = \frac{V_n}{\omega_c}$$

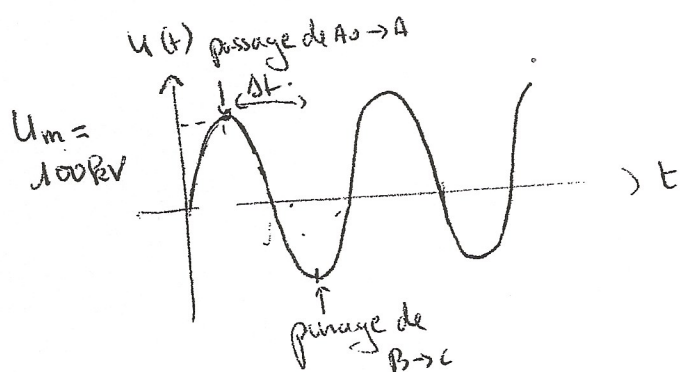
$$d = \pi R_N = \pi \frac{V_n}{\omega_c} = \pi \frac{m V_n}{q B}$$

$$6.) \Delta t = \frac{d}{V_n} = \frac{\pi m}{q B} \text{ indépendant de } V_n$$

2.2] Etude du wr entre les DEES.

$\vec{F} = q\vec{E}$ et $q > 0 \Rightarrow \vec{E}$ de A_0 vers A et $\vec{E}$ vers les potentiels décroissant $\Rightarrow U = U_{A_0 A} > 0$.

$\vec{F} = q\vec{E}$ $\Rightarrow \vec{E}$ doit changer de sens et est dirigé de B vers $C \Rightarrow U_{BC} > 0$
d'où $U = U_{A_0 A} = U_{CB} < 0$ (changement de signe).



$$\Delta t = \frac{T}{2} = \frac{1}{2f} = \frac{\pi m}{q B}$$

$$\boxed{f = \frac{q B}{2 \pi m}}$$

TD Particules chargées dans un champ E ou B

Annexe

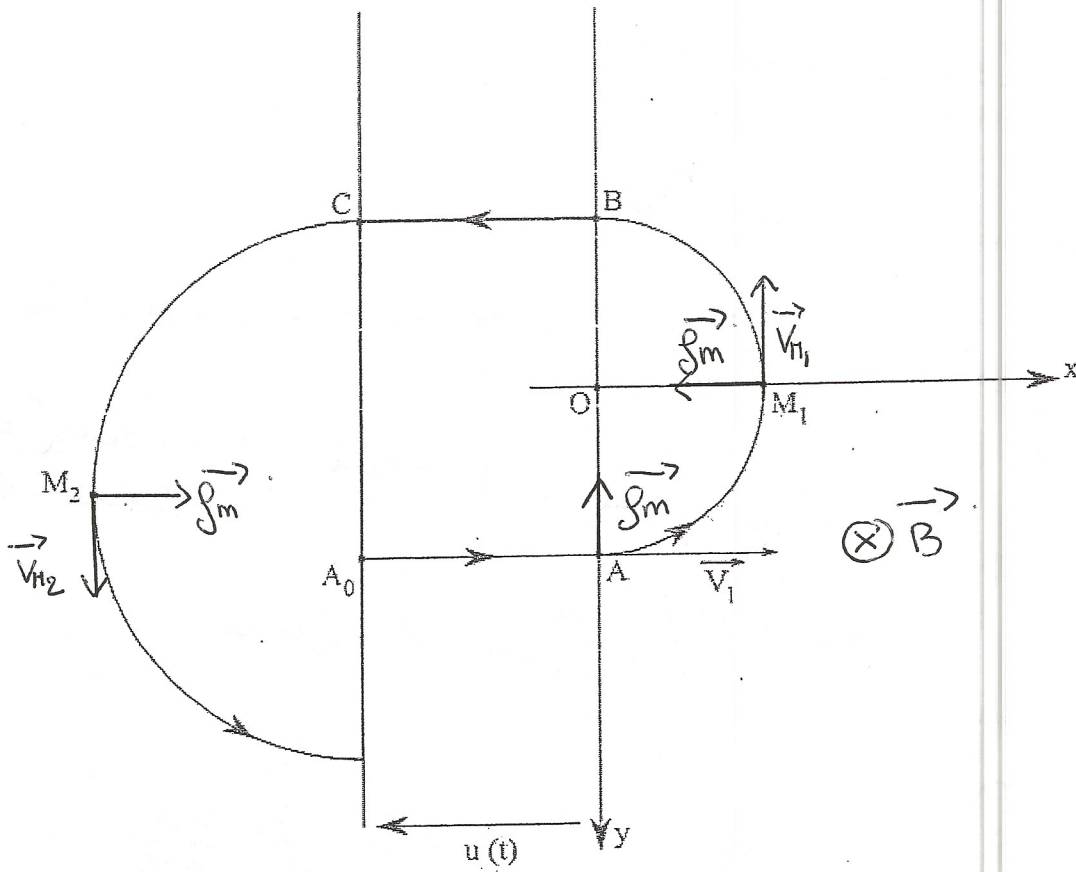
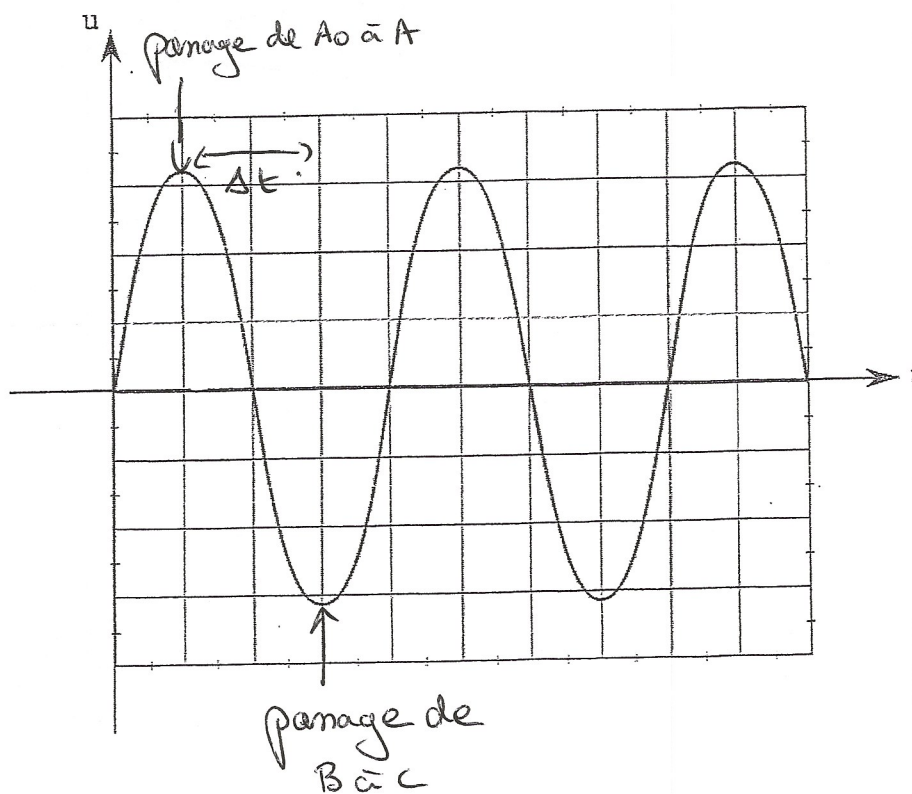
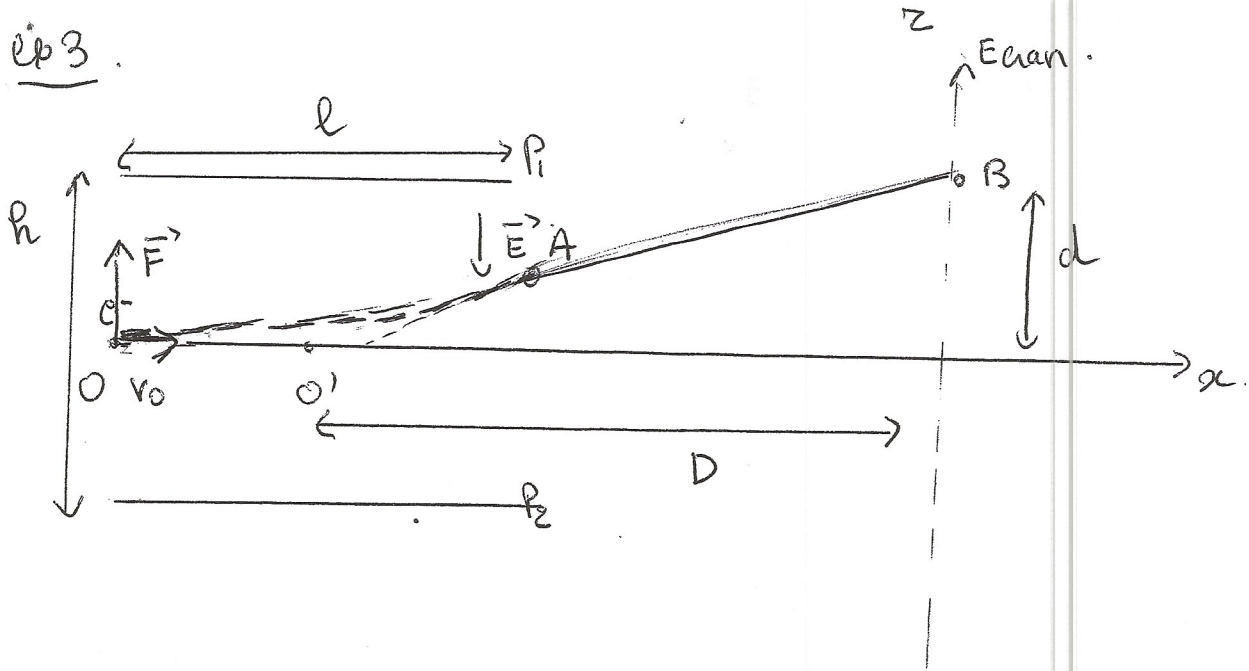


Schéma 1



Ep 3.

(7)



* $U = V(P_1) - V(P_2)$

$\vec{F} = q \vec{E}$ vers le haut avec $q < 0 \Rightarrow \vec{E}$ dirigé de P_1 vers P_2 . On sait que $\vec{E}$ est dirigé vers les potentiels décroissants, donc $V(P_2) < V(P_1) \Rightarrow U = V(P_1) - V(P_2) > 0$.

a)
$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{U_0 = V(P) - V(C)} & P \\ \cdot & \begin{array}{c} \leftarrow \vec{E} \\ \vec{F} \end{array} & \cdot \\ \text{Cathode} & & \text{Anode.} \end{array}$$

$E_m = \text{cte} \rightarrow E_m(C) = E_m(P)$.

$\frac{1}{2} m \cdot 0^2 + q V(C) = \frac{1}{2} m v_0^2 + q V(P)$ et $q = -e$.

$\Rightarrow \frac{1}{2} m v_0^2 = q [V(C) - V(P)] = e [V(P) - V(C)] = e \cdot U_0$.

$\Rightarrow \boxed{v_0 = \sqrt{\frac{2eU_0}{m}}}$ AN $v_0 = 2,65 \cdot 10^7 \text{ ms}^{-1}$.

b) Entre A et B, l'électron n'est soumis à aucun champ électrique $\Rightarrow$ trajectoire rectiligne uniforme avec $\vec{v} = \vec{v}_A$.

Trajectoire entre les plaques.

(8)



$$\vec{OM} = x(t) \vec{e}_x + z(t) \vec{e}_z \quad \text{et} \quad \vec{E} = +E \vec{e}_z \quad \text{avec} \quad E = -\frac{U}{h}.$$

$$m \vec{a} = q \vec{E} \quad \text{ds le référentiel du laboratoire galiléen.}$$

$$\text{proj}/x \quad m \ddot{x} = 0$$

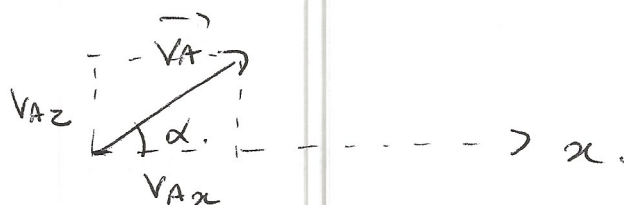
$$\text{proj}/z \quad m \ddot{z} = \frac{e \cdot U}{h} \quad (q = -e).$$

$$\Rightarrow \dot{x} = v_0 \rightarrow x = v_0 t. \quad (1)$$

$$\dot{z} = \frac{eU}{m h} \cdot t \rightarrow z = \frac{eU}{2m h} t^2 \quad (2)$$

$$\text{d'où} \quad \boxed{z = \frac{eU}{2m v_0^2 h} \cdot x^2.}$$

$$\text{Calcul de } \alpha = (\vec{v}_0; \vec{v}_A)$$



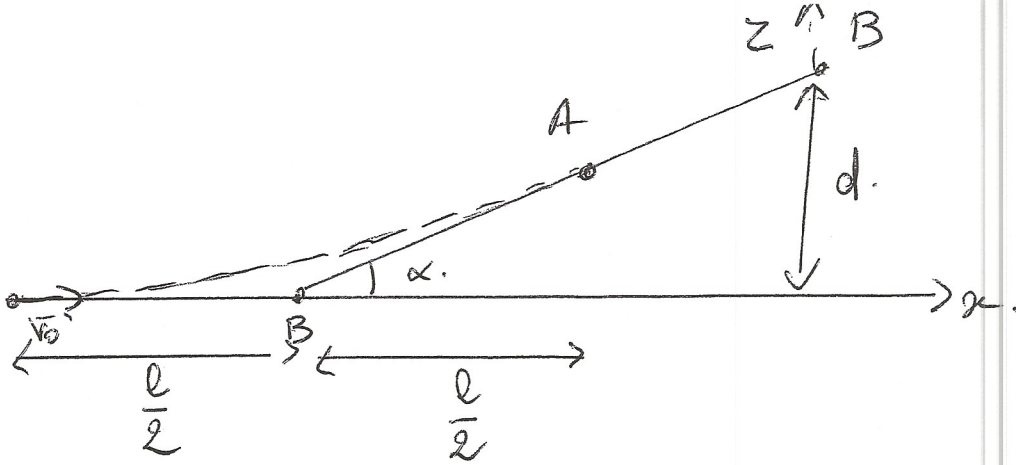
$$\text{tg } \alpha = \frac{v_{Az}}{v_{Ax}} \quad \text{or en A, } x = l \quad \text{d'où} \quad t_A = \frac{l}{v_0} \quad (\text{d'après 1}).$$

$$\text{d'où} \quad \vec{v}_A \left| \begin{array}{l} \dot{x}_A = v_0 = v_{Ax} \\ \dot{z}_A = \frac{eU}{m h} t_A = \frac{eU \cdot l}{m v_0 h} = v_{Az} \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \text{tg } \alpha = \frac{v_{Az}}{v_{Ax}} = \boxed{\frac{eU \cdot l}{m v_0^2 h} = \text{tg } \alpha}$$

c]

(9)



On cherche l'intersection de la droite AB avec l'axe x .

La droite AB est colinéaire à $\vec{v}_A$, son coefficient directeur est $\tan \alpha$, donc

$z = \tan \alpha \cdot x + b$ - Cette droite passe par A dont les coordonnées sont :

$$A \mid x_A = l, z_A = \frac{e U e^2}{2 m v_0^2 R} = \tan \alpha \cdot \frac{l}{2} \quad \text{puisque } \tan \alpha = \frac{e U e}{m v_0^2 R}.$$

On calcule b :
(Avec l'équation de la droite) $\tan \alpha \cdot \frac{l}{2} = \tan \alpha \cdot l + b \Rightarrow b = -\tan \alpha \cdot \frac{l}{2}$

$$\Rightarrow \boxed{z = \tan \alpha \left(x - \frac{l}{2}\right)} \quad \text{D'où B}$$

a pour coordonnée B $\mid z_B = 0, x_B = \frac{l}{2}$; on a alors $\tan \alpha = \frac{d}{D} = \frac{e U e}{m v_0^2 R}$.

$$\text{Avec } v_0 = 265 \cdot 10^7 \text{ m s}^{-1} \Rightarrow d = 9 \text{ mm}.$$

$$\boxed{d = \frac{e \cdot D \cdot e}{m \cdot v_0^2 R} \cdot U} \quad (d \text{ proportionnel à } U)$$

Pour mesurer des tensions + faibles, il faut les amplifier.
Sensibilité verticale de l'oscillo 1 mV/cm à 20 V/cm .

Temps de passage de l'électron entre les plaques $\tau = \frac{l}{v_0} = 2,26 \text{ ns}$.

$$Z \ll \frac{1}{\beta} = \frac{1}{2 \cdot 10^6} = 0,5 \cdot 10^{-6} \text{ m} = 500 \text{ nm}.$$

(10)

La tension instantanée peut être considérée comme
 constante pour un électron lors de la traversée des
 plaques, ce qui permet de mesurer des tensions
 variables -

Grâce à un second jeu de plaques verticales,
 auxquelles on applique une tension fonction
 linéaire du temps -

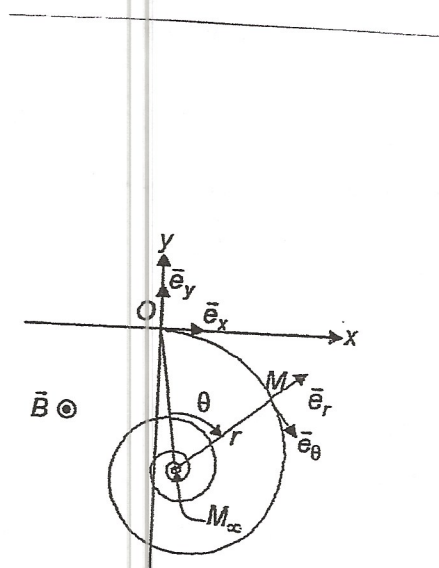
04

$$dE_c = \underbrace{\delta W_{F_m}}_0 + \underbrace{\delta W_{F^1}}_{-\lambda \vec{v} \cdot d\vec{r}} \text{ avec } d\vec{r} = \vec{v} dt$$

$$dE_c = -\lambda v^2 dt < 0 \Rightarrow \|\vec{v}\| \searrow$$

E_c de la particule décroît. Si les
 effets sont négligés, la trajectoire
 est un cercle de rayon $R = \frac{mv_0}{qB}$.

Donc $R \searrow \Rightarrow$ Trajectoire spirale -



b] PFD appliqué à la particule.

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = q \vec{v} \wedge \vec{B} - \lambda \vec{v}.$$

$$\begin{cases} \vec{ON} = x \vec{e}_x + y \vec{e}_y \\ \vec{v} = \dot{x} \vec{e}_x + \dot{y} \vec{e}_y \\ \vec{a} = \ddot{x} \vec{e}_x + \ddot{y} \vec{e}_y \end{cases} \Rightarrow \vec{v} \wedge \vec{B} = \begin{vmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ 0 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ B \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{y} B \\ -\dot{x} B \\ 0 \end{pmatrix}$$

d'où on a les équations sur x et y :

$$\begin{cases} m \ddot{x} = q B \dot{y} - \lambda \dot{x} \\ m \ddot{y} = -q B \dot{x} - \lambda \dot{y} \end{cases} \quad \text{ou}$$

$$\begin{cases} \ddot{x} = \omega_c \dot{y} - \frac{\dot{x}}{\tau} \\ \ddot{y} = -\omega_c \dot{x} - \frac{\dot{y}}{\tau} \end{cases}$$

On pose $u = \dot{x} + i \dot{y}$.

$$(1) + i(2) \Rightarrow \ddot{u} = \omega_c [\dot{y} - i \dot{x}] - \frac{1}{\tau} \dot{u}$$

On obtient $\ddot{u} = -i \omega_c \underbrace{(\dot{x} + i \dot{y})}_{\dot{u}} - \frac{1}{\tau} \dot{u}$.

d'où $\ddot{u} = -\left[\frac{1}{\tau} + i \omega_c\right] \dot{u}$ on pose.

$$\dot{u} = -\left[\frac{1}{\tau} + i \omega_c\right] u + \underline{\underline{cste}} \quad \text{avec à } t=0 \quad \begin{matrix} u=0 \\ \dot{u}=v_0 \end{matrix} \Rightarrow cste = v_0.$$

$$\boxed{\dot{u} = v_0 - \left[\frac{1 + i \omega_c \tau}{\tau}\right] u}$$

lorsque $t \rightarrow \infty \quad \dot{u} = 0 \Rightarrow u_\infty = \frac{v_0 \cdot \tau}{[1 + i \omega_c \tau]} = \frac{v_0 \tau [1 - i \omega_c \tau]}{1 + \omega_c^2 \tau^2}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_\infty = \frac{\tau v_0}{1 + \omega_c^2 \tau^2} \\ y_\infty = \frac{-\tau^2 \omega_c v_0}{1 + \omega_c^2 \tau^2} \end{cases}$$

On reprend l'équation différentielle.

$$\ddot{u} = V_0 - \left(\frac{1 + i\omega_c \tau}{\tau} \right) u.$$

$$\ddot{u} + \left(\frac{1 + i\omega_c \tau}{\tau} \right) u = V_0 \Rightarrow u = A e^{-\frac{(1+i\omega_c \tau)}{\tau} t} + u_\infty.$$

$$\text{à } t = 0 \quad u = 0 \Rightarrow A = -u_\infty.$$

$$u = -u_\infty \left[e^{-\frac{t}{\tau}} e^{-i\omega_c t} \right] + u_\infty.$$

$$= -(x_\infty + i y_\infty) e^{-\frac{t}{\tau}} (\cos \omega_c t + i \sin \omega_c t) + x_\infty + i y_\infty.$$

$$= \left(e^{-\frac{t}{\tau}} [x_\infty \cos \omega_c t - y_\infty \sin \omega_c t] + x_\infty \right) + i e^{-\frac{t}{\tau}} [x_\infty \sin \omega_c t + y_\infty \cos \omega_c t] + i y_\infty$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = x_\infty e^{-\frac{t}{\tau}} [x_\infty \cos \omega_c t - y_\infty \sin \omega_c t] \\ y = y_\infty e^{-\frac{t}{\tau}} [x_\infty \sin \omega_c t + y_\infty \cos \omega_c t] \end{cases}$$

$$\Rightarrow \theta(t) = \omega_c t + \alpha$$

$$\begin{aligned} \vec{M}_{\infty} \Pi &= \vec{O} \Pi - \vec{O} \Pi_\infty \\ &= e^{-\frac{t}{\tau}} (x_\infty \cos \omega_c t - y_\infty \sin \omega_c t) = r \cos \theta \sin \theta \\ &= e^{-\frac{t}{\tau}} (x_\infty \sin \omega_c t + y_\infty \cos \omega_c t) = r \sin \theta \cos \theta. \end{aligned}$$

$$r = e^{-\frac{t}{\tau}} [x_\infty^2 + y_\infty^2]^{\frac{1}{2}} = e^{-\frac{t}{\tau}} \left(\frac{\tau^2 V_0^2 (1 + \omega_c^2 \tau^2)}{(1 + \omega_c^2 \tau^2)^2} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\boxed{r(t) = \frac{\tau V_0 e^{-\frac{t}{\tau}}}{\sqrt{1 + \omega_c^2 \tau^2}}}$$