Devoir à la maison n° 9

Exercice 1.

1. (a) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Montrer qu'il existe un unique $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $Q' = P$ et $\int_0^1 Q(t)dt = 0$.

   (b) En déduire qu'il existe une unique suite de polynômes $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que :
$$B_0 = 1, \qquad \forall n \in \mathbb{N},\ B'_{n+1} = (n+1)B_n \quad \text{et} \quad \int_0^1 B_{n+1}(t)dt = 0.$$
   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $b_n = B_n(0)$.
2. Pour $n \in \mathbb{N}$, quel est le degré de B_n ? Déterminer B_n et b_n pour tout $n \in [\![0, 5]\!]$.
3. (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ B_{n+1}(0) = B_{n+1}(1)$. *On utilisera astucieusement la définition des B_n.*

   (b) Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ B_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b_{n-k} X^k$.

   (c) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, b_n en fonction de $b_0, \cdots, b_{n-1}$. Calculer b_6.
4. (a) Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ B_n(X+1) - B_n(X) = nX^{n-1}$.

   (b) Pour $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$, on note $S_p(n) = \sum_{k=0}^{n} k^p$. Montrer que $S_p(n) = \dfrac{B_{p+1}(n+1) - b_{p+1}}{p+1}$.

   (c) En déduire $S_p(n)$ en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$ pour $p = 1, 2, 3, 4$.

Exercice 2. On rappelle que, d'après le théorème de d'Alembert-Gauss, un polynôme P de degré $n \in \mathbb{N}$ à coefficients complexes admet exactement n racines complexes, éventuellement confondues.
On cherche, dans cet exercice, l'expression générale de ces racines en fonction des coefficients de P.

1. Dans cette question, on considère $P = aX^2 + bX + c$, où $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$, avec $a \neq 0$.
   On note r_1, r_2 les racines complexes de P, puis :
$$s_1 = r_1 + r_2, \qquad s_2 = r_1 - r_2.$$
   (a) Si l'on échange r_1 et r_2, qu'arrive-t-il à s_1 et s_2 ? En déduire que s_1 et s_2^2 sont *symétriques* en r_1, r_2, c'est-à-dire invariants lorsque r_1 et r_2 sont échangés.

   (b) On note $\sigma_1 = r_1 + r_2$ et $\sigma_2 = r_1 r_2$. Exprimer s_1 et s_2^2 en fonction de σ_1 et σ_2.
   Que valent σ_1, σ_2 en fonction de a, b, c ? En déduire s_1 et s_2^2 en fonction de a, b, c.

   (c) En déduire r_1 et r_2 en fonction de a, b, c.

$\boxed{\textit{Cette page est facultative.}}$

Si vous souhaitez traiter cette page, commencez par l'exercice 3 (rapide) avant de vous attaquer à la (difficile) fin de l'exercice 2.

2. On considère à présent $P = aX^3 + bX^2 + cX + d$, où $(a, b, c, d) \in \mathbb{C}^4$, avec $a \neq 0$.
   On note r_1, r_2, r_3 les racines complexes de P, puis, en notant $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$:

$$s_1 = r_1 + r_2 + r_3, \qquad s_2 = r_1 + jr_2 + j^2 r_3, \qquad s_3 = r_1 + j^2 r_2 + jr_3.$$

   (a) Si l'on échange r_1, r_2, r_3, qu'arrive-t-il à s_1, s_2, s_3 ?
   En déduire que s_1, $s_2 s_3$ et $s_2^3 + s_3^3$ sont symétriques en r_1, r_2, r_3.

   (b) On note :
$$\sigma_1 = r_1 + r_2 + r_3, \quad \sigma_2 = r_1 r_2 + r_1 r_3 + r_2 r_3 \quad \text{et} \quad \sigma_3 = r_1 r_2 r_3.$$
   Montrer que :
$$s_1 = \sigma_1, \quad s_2 s_3 = \sigma_1^2 - 3\sigma_2 \quad \text{et} \quad s_2^3 + s_3^3 = 2\sigma_1^3 - 9\sigma_1\sigma_2 + 27\sigma_3.$$
   Que valent $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ en fonction de a, b, c, d ?
   En déduire s_1, $s_2 s_3$ et $s_2^3 + s_3^3$ en fonction de a, b, c, d.

   (c) Expliquer comment calculer s_1, s_2, s_3 à partir de a, b, c, d, et écrire r_1, r_2, r_3 en fonction de s_1, s_2, s_3.

3. Expliquer brièvement comment généraliser cette méthode lorsque P est de degré n.

Exercice 3.

1. Un rayon laser vertical de longueur ℓ se trouve à bord d'un train se déplaçant horizontalement, en ligne droite, à une vitesse v. On note respectivement c_0 la vitesse de la lumière, et T_0 son temps de parcours d'un bout à l'autre du rayon laser, dans le référentiel $\mathcal{R}_0$ du train, et c et T ces mêmes données dans le référentiel terrestre $\mathcal{R}$.

   (a) Déterminer T_0, et montrer que $T = \dfrac{\sqrt{\ell^2 + v^2 T^2}}{c}$.

   (b) La physique newtonienne voudrait que $T = T_0$. La *théorie de la relativité* affirme au contraire que la vitesse de la lumière est indépendante du référentiel : $c = c_0$. En déduire dans ce cas que $T = \gamma T_0$, où $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$.

2. On admet que la même transformation s'applique à l'énergie d'un corps de masse m : $E = \gamma E_0$.

   (a) En supposant $v \ll c$, c'est-à-dire $\dfrac{v}{c}$ très proche de 0, déterminer un équivalent de $E - E_0$.

   (b) Cet équivalent étant égal à l'énergie cinétique acquise $\dfrac{1}{2}mv^2$, déterminer E_0.