Devoir surveillé n° 5
CORRIGÉ

Exercice 1. On résout, en utilisant la méthode du pivot :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+y+\lambda z &=& \lambda \\ x+\lambda y+z &=& 1 \\ \lambda x+y+z &=& 2-\lambda \end{array}\right. \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2-L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3-\lambda L_1}}{\iff} \left\{\begin{array}{lllcl} x & +y & +\lambda z &=& \lambda \\ & (\lambda-1)y & +(1-\lambda)z &=& 1-\lambda \\ & (1-\lambda)y & +(1-\lambda^2)z &=& 2-\lambda-\lambda^2 \end{array}\right.$$

$$\underset{\substack{L_2 \leftarrow \frac{1}{\lambda-1}L_2 \\ \textbf{si}\ \lambda\neq 1}}{\iff} \left\{\begin{array}{lllcl} x & +y & +\lambda z &=& \lambda \\ & y & -z &=& -1 \\ & (1-\lambda)y & +(1-\lambda^2)z &=& 2-\lambda-\lambda^2 \end{array}\right.$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3-(1-\lambda)L_2}{\iff} \left\{\begin{array}{lllcl} x & +y & +\lambda z &=& \lambda \\ & y & -z &=& -1 \\ & & -(\lambda-1)(\lambda+2)z &=& -(\lambda-1)(\lambda+3) \end{array}\right.$$

$$\underset{\substack{L_3 \leftarrow \frac{1}{-(\lambda-1)(\lambda+2)}L_3 \\ \textbf{si}\ \lambda\neq -2}}{\iff} \left\{\begin{array}{lllcl} x & +y & +\lambda z &=& \lambda \\ & y & -z &=& -1 \\ & & z &=& \frac{\lambda+3}{\lambda+2} \end{array}\right.$$

$$\underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2+L_3 \\ L_1 \leftarrow L_1-\lambda L_3}}{\iff} \left\{\begin{array}{lllcl} x & +y & &=& -\frac{\lambda}{\lambda+2} \\ & y & &=& \frac{1}{\lambda+2} \\ & & z &=& \frac{\lambda+3}{\lambda+2} \end{array}\right.$$

$$\underset{L_1 \leftarrow L_1-L_2}{\iff} \left\{\begin{array}{lllcl} x & & &=& -\frac{\lambda+1}{\lambda+2} \\ & y & &=& \frac{1}{\lambda+2} \\ & & z &=& \frac{\lambda+3}{\lambda+2} \end{array}\right.$$

donc le système est de Cramer, et :

$$S=\left\{\left(-\frac{\lambda+1}{\lambda+2},\frac{1}{\lambda+2},\frac{\lambda+3}{\lambda+2}\right)\right\} \text{ si } \lambda\neq -2,1.$$

C'est un point de $\mathbb{R}^3$.

Si $\lambda=-2$, alors le système a 2 pivots et un paramètre. Il s'écrit $\left\{\begin{array}{lllcl} x & +y & +\lambda z &=& \lambda \\ & y & -z &=& -1 \\ & & 0 &=& 3 \end{array}\right.$. La condition de compatibilité n'est pas vérifiée, donc le système n'a pas de solution : $S=\emptyset$.

Si $\lambda=1$, alors le système a 1 pivot et deux paramètres. Il s'écrit $x+y+z=1$, et a pour solution :

$$S=\left\{(1-y-z,y,z)\mid (y,z)\in\mathbb{R}^2\right\}=\mathbb{R}(-1,1,0)+\mathbb{R}(-1,0,1)+(1,0,0).$$

C'est le plan de $\mathbb{R}^3$ de vecteurs directeurs $(-1,1,0)$ et $(-1,0,1)$, passant par le point $(1,0,0)$.

Exercice 2.

1. On a directement : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n \geq \sqrt{n}$. Or $\sqrt{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, donc, d'après le théorème de divergence par minoration, (u_n) diverge vers $+\infty$.
2. Par définition, on a : $\forall n \geq 2,\ u_n = \sqrt{n + u_{n-1}}$, c'est-à-dire : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} = \sqrt{n+1+u_n}$.
3. On a : $u_1 = \sqrt{1} = 1$, donc l'assertion voulue est vraie pour $n = 1$.
   Soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons que $u_n \leq n$. Alors, d'après la question 2 : $u_{n+1} \leq \sqrt{n+1+n} = \sqrt{2n+1}$.
   Or :
   $$\sqrt{2n+1} \leq n+1 \Leftrightarrow 2n+1 \leq (n+1)^2 \Leftrightarrow 2n+1 \leq n^2+2n+1 \Leftrightarrow n^2 \geq 0.$$
   Cette dernière assertion étant vraie, par équivalence la première l'est aussi, donc : $u_{n+1} \leq n+1$. L'assertion voulue est donc héréditaire.
   Par récurrence, on a donc bien : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n \leq n$.
4. D'après les résultats précédents : $\forall n \geq 2,\ 0 \leq u_n = \sqrt{n+u_{n-1}} \leq \sqrt{2n-1}$, donc : $0 \leq \dfrac{u_n}{n} \leq \dfrac{\sqrt{2n-1}}{n}$. Or : $\dfrac{\sqrt{2n-1}}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc, par encadrement, $\dfrac{u_n}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Donc $u_n = \underset{n\to+\infty}{o}(n)$.
5. D'après les résultats précédents :
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} = \sqrt{n+1+\underset{n\to+\infty}{o}(n)} = \sqrt{n+1}\sqrt{1+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{n}{n+1}\right)} = \sqrt{n+1}\sqrt{1+\underset{n\to+\infty}{o}(1)}.$$
   Donc $\dfrac{u_{n+1}}{\sqrt{n+1}} = \sqrt{1+\underset{n\to+\infty}{o}(1)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.
   On a donc : $u_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{n+1}$, c'est-à-dire : $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{n}$.
6. On a : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \sqrt{n} + \underset{n\to+\infty}{o}(\sqrt{n})$, donc $u_n = \sqrt{n+\sqrt{n}+\underset{n\to+\infty}{o}(\sqrt{n})}$. Donc :
   $$u_n - \sqrt{n} = \sqrt{n}\left(\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{n}}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}-1\right).$$
   Or : $\sqrt{1+\dfrac{1}{\sqrt{n}}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)}-1 \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2\sqrt{n}}$, donc : $u_n - \sqrt{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{n} \times \dfrac{1}{2\sqrt{n}} = \dfrac{1}{2}$.
   Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n - \sqrt{n} = \dfrac{1}{2}$.

Exercice 3.

1. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ symétrique et inversible. On a $AA^{-1} = I_n$. La transposée de cette égalité s'écrit : $(A^{-1})^\intercal A^\intercal = I_n^\intercal$, donc, comme A et I_n sont symétriques : $(A^{-1})^\intercal A = I_n$, donc $(A^{-1})^\intercal = A^{-1}$. Donc A^{-1} est symétrique.
2. (a) On a directement : $B^\intercal = M^\intercal (M^\intercal)^\intercal = M^\intercal M = B$, donc B est symétrique. De même, C est symétrique.
   De plus, $MB = I_n$, donc B est inversible, d'inverse M. De même, C est inversible d'inverse M (et en fait, $B = C = M^{-1}$.
   (b) D'après la question 1., comme B est symétrique et inversible, $B^{-1} = M$ est symétrique. Donc $M^3 = MM^\intercal M = I_n$.
3. (a) Soient $A, B \in M_n(\mathbb{R})$. On a directement :
   $$\operatorname{tr}(A+B) = \sum_{i=1}^{n} (a_{ii} + b_{ii}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} + \sum_{i=1}^{n} b_{ii} = \operatorname{tr}(A) + \operatorname{tr}(B).$$
   (b) Notons $C = A^2$. Comme A est symétrique, on a : $\forall i \in [\![1,n]\!],\ c_{ii} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{ik}a_{ki} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}^2 \geq 0$, donc $\operatorname{tr}(C) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} c_{ii} \geq 0$. Comme tous les termes de la somme sont positifs, il y a égalité si et seulement si : $\forall i \in [\![1,n]\!],\ c_{ii} = 0$, c'est-à-dire : $\forall (i,k) \in [\![1,n]\!]^2,\ a_{ik} = 0$, c'est-à-dire $A = 0_n$.
4. On a directement :
   - $\operatorname{tr}\left((M - I_n)^2\right) = \operatorname{tr}\left(M^2 - 2M + I_n\right) = \operatorname{tr}\left(M^2\right) - \operatorname{tr}\left(2M\right) + \operatorname{tr}\left(I_n\right) = b - 2a + n,$
   - $\operatorname{tr}\left((M^2 - I_n)^2\right) = \operatorname{tr}\left(M^4 - 2M^2 + I_n\right) \underset{M^3 = I_n}{=} \operatorname{tr}\left(M\right) - \operatorname{tr}\left(2M^2\right) + \operatorname{tr}\left(I_n\right) = a - 2b + n,$
   - $\operatorname{tr}\left((M - M^2)^2\right) = \operatorname{tr}\left(M^2 - 2M^3 + M^4\right) \underset{M^3 = I_n}{=} \operatorname{tr}\left(M^2\right) - \operatorname{tr}\left(2I_n\right) + \operatorname{tr}\left(M\right) = b - 2n + a.$
5. Il est facile de voir que les matrices $M - I_n$, $M^2 - I_n$ et $M - M^2$ sont symétriques. Donc, d'après 3.(b), les traces de leurs carrés sont positives. Or, d'après 4, la somme de ces traces est nulles, donc elles sont toutes les trois nulles. Donc, à nouveau d'après 3.(b), ces trois matrices sont nulles. En particulier : $M = I_n$.
   Réciproquement, la matrice $M = I_n$ satisfait l'égalité $MM^\intercal M = I_n$: il y a donc une et une seule solution à cette équation.

Problème.

I. On a : $p_0 = 1$, $p_1 = 1 \times 2 + 1 = 3$, $p_2 = 2 \times 3 + 1 = 7$, $p_3 = 2 \times 7 + 3 = 17$, $p_4 = 2 \times 17 + 7 = 41$, et de même : $q_0 = 1$, $q_1 = 2$, $q_2 = 2 \times 2 + 1 = 5$, $q_3 = 2 \times 5 + 2 = 12$, $q_4 = 2 \times 12 + 5 = 29$, donc : $x_0 = 1$, $x_1 = \dfrac{3}{2}$, $x_2 = \dfrac{7}{5}$, $x_3 = \dfrac{17}{12}$, $x_4 = \dfrac{41}{29}$.

II. 1. On procède par récurrence double : $q_0 = 1 \geq 0$, $q_1 = a_1 \geq 1$ et $q_2 \geq q_1 + q_0 \geq 2$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons $q_n \geq n$ et $q_{n+1} \geq n + 1$, alors :

$$q_{n+2} = a_{n+2} q_{n+1} + q_n \geq q_{n+1} + q_n \geq 2n + 1 \geq n + 2.$$

Par récurrence, on a donc : $\forall n \in \mathbb{N},\ q_n \geq n$.
D'après le théorème de divergence par minoration, on en déduit que $q_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

2. On a :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} &= (a_{n+2} p_{n+1} + p_n) q_{n+1} - (a_{n+2} q_{n+1} + q_n) p_{n+1} \\ &= p_n q_{n+1} - q_n p_{n+1} \\ &= -u_n \end{aligned}$$

donc, par une récurrence immédiate : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (-1)^n u_0$. Or $u_0 = p_1 q_0 - q_1 p_0 = a_0 a_1 + 1 - a_0 a_1 = 1$, donc : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (-1)^n$.
De même :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n &= (a_{n+2} p_{n+1} + p_n) q_n - (a_{n+2} q_{n+1} + q_n) p_n \\ &= a_{n+2} u_n \\ &= (-1)^n a_{n+2}. \end{aligned}$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la question précédente, on a :

$$x_{n+1} - x_n = \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - \frac{p_n}{q_n} = \frac{u_n}{q_n q_{n+1}} = \frac{(-1)^n}{q_n q_{n+1}},$$

et :

$$x_{n+2} - x_n = \frac{p_{n+2}}{q_{n+2}} - \frac{p_n}{q_n} = \frac{v_n}{q_n q_{n+2}} = \frac{(-1)^n a_{n+2}}{q_n q_{n+2}}.$$

4. Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la question précédente, on a :

- $x_{2(n+1)} - x_{2n} = x_{2n+2} - x_{2n} = \dfrac{(-1)^{2n} a_{2n+2}}{q_{2n} q_{2n+2}} = \dfrac{a_{2n+2}}{q_{2n} q_{2n+2}} > 0$, donc la suite (x_{2n}) est croissante,
- $x_{2(n+1)+1} - x_{2n+1} = x_{2n+3} - x_{2n+1} = \dfrac{(-1)^{2n+1} a_{2n+3}}{q_{2n+1} q_{2n+3}} = -\dfrac{a_{2n+3}}{q_{2n+1} q_{2n+3}} < 0$, donc la suite (x_{2n+1}) est décroissante,
- $x_{2n+1} - x_{2n} = \dfrac{(-1)^{2n}}{q_{2n} q_{2n+1}} = \dfrac{1}{q_{2n} q_{2n+1}} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ puisque $q_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$,

donc les suites (x_{2n}) et (x_{2n+1}) sont adjacentes.

5. Comme les suites (x_{2n}) et (x_{2n+1}) sont adjacentes, on sait qu'elles convergent vers une même limite $\alpha \in \mathbb{R}$. Comme ces deux sous-suites partitionnent la suite (x_n), on en déduit que la suite (x_n) est elle-même convergente, de limite α.

III. 1. Comme les suites (x_{2n}) et (x_{2n+1}) sont adjacentes, avec (x_{2n}) croissante et (x_{2n+1}) décroissante, on a directement : $x_0 < \alpha < x_1$, c'est-à-dire $a_0 < \alpha < a_0 + \dfrac{1}{a_1} \leq a_0 + 1$. Donc $a_0 = \lfloor \alpha \rfloor$.

2. On raisonne par récurrence :
On a : $x_0 = \dfrac{p_0}{q_0} = a_0$, $x_1 = \dfrac{p_1}{q_1} = \dfrac{a_0 a_1 + 1}{a_1} = a_0 + \dfrac{1}{a_1}$ et :

$$x_2 = \frac{a_2 p_1 + p_0}{a_2 q_1 + q_0} = \frac{a_2 a_1 a_0 + a_2 + a_0}{a_2 a_1 + 1} = a_0 + \frac{a_2}{a_2 a_1 + 1} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2}}.$$

Soit $n \geq 2$, supposons l'assertion vraie au rang n. Considérons la suite (b_n) suggérée, et notons (y_n) la suite correspondant à (x_n) pour (b_n). On a donc : $\forall k \leq n-1$, $y_k = x_k$. De plus, par hypothèse de récurrence, $y_n = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots + \frac{1}{a_{n+1}}}}}$.

Il ne reste plus qu'à montrer que $y_n = x_{n+1}$:

$$\begin{aligned} y_n &= \frac{b_n p_{n-1} + p_{n-2}}{b_n q_{n-1} + q_{n-2}} \\ &= \frac{\left(a_n + \frac{1}{a_{n+1}}\right) p_{n-1} + p_{n-2}}{\left(a_n + \frac{1}{a_{n+1}}\right) q_{n-1} + q_{n-2}} \\ &= \frac{(a_n a_{n+1} + 1)\, p_{n-1} + a_{n+1} p_{n-2}}{(a_n a_{n+1} + 1)\, q_{n-1} + a_{n+1} q_{n-2}} \\ &= \frac{a_{n+1}(a_n p_{n-1} + p_{n-2}) + p_{n-1}}{a_{n+1}(a_n q_{n-1} + q_{n-2}) + q_{n-1}} \\ &= \frac{a_{n+1} p_n + p_{n-1}}{a_{n+1} q_n + q_{n-1}} \\ &= \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} \\ &= x_{n+1}, \end{aligned}$$

donc l'assertion est vraie au rang $n+1$. Par récurrence, elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3. On a directement : $\forall n \in \mathbb{N},\ \alpha_n = a_n + \dfrac{1}{\alpha_{n+1}}$.

4. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a directement : $\alpha_{n+1} > a_{n+1} \geq 1$, donc, d'après la question précédente : $a_n < \alpha_n < a_n + 1$, et donc : $a_n = \lfloor \alpha_n \rfloor$.

5. On a vu que $a_0 = \lfloor \alpha \rfloor$. On calcule alors $\alpha_1 = \dfrac{1}{\alpha - a_0}$, puis $a_1 = \lfloor \alpha_1 \rfloor$. Et ainsi de suite, par récurrence : pour $n \in \mathbb{N}$ donné, α_n et a_n étant connus, on calcule $\alpha_{n+1} = \dfrac{1}{\alpha_n - a_n}$ puis $a_{n+1} = \lfloor \alpha_{n+1} \rfloor$.

6. Pour $\alpha = \sqrt{2}$: on a $a_0 = \lfloor \sqrt{2} \rfloor = 1$, puis $\alpha_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2} - 1} = \sqrt{2} + 1$, donc $a_1 = \lfloor \alpha_1 \rfloor = 2$, puis $\alpha_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2} + 1 - 2} = \alpha_1$, donc $a_2 = a_1 = 2$; donc les suites (α_n) et (a_n) sont stationnaires, et on a : $a_0 = 1$ et $\forall n \geq 1,\ a_n = 2$. C'est le cas traité en I., et on peut en effet vérifier que $x_4 = \dfrac{41}{29}$ est une bonne approximation de $\sqrt{2}$.

Pour $\alpha = \sqrt{3}$: on a $a_0 = \lfloor \sqrt{3} \rfloor = 1$, puis $\alpha_1 = \dfrac{1}{\sqrt{3}-1} = \dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$, donc $a_1 = \lfloor \alpha_1 \rfloor = 1$, puis $\alpha_2 = \dfrac{1}{\frac{\sqrt{3}+1}{2} - 1} = \sqrt{3}+1$, donc $a_2 = \lfloor \sqrt{3}+1 \rfloor = 2$, puis $\alpha_3 = \dfrac{1}{\sqrt{3}+1-2} = \alpha_1$, donc $a_3 = a_1 = 1$. Par une récurrence immédiate, on a donc : $a_0 = 1$ et : $\forall n \in \mathbb{N},\ a_{2n+1} = 1$ et $a_{2n+2} = 2$.
On a ainsi obtenu les *développements en fraction continue* suivants :

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\dots}}}} \quad \text{et} \quad \sqrt{3} = 1 + \cfrac{1}{1 + \frac{1}{2+\frac{1}{1+\frac{1}{2+\dots}}}},$$

que l'on note de façon plus pratique :

$$\sqrt{2} = [1, 2, 2, 2, 2, \dots] \quad \text{et} \quad \sqrt{3} = [1, 1, 2, 1, 2, 1, 2 \dots].$$

En voici d'autres :

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} = [1, 1, 1, 1, 1, \dots], \quad e = [2, 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, \dots], \quad \pi = [3, 7, 15, 1, 292, 1, 1, 1, 2 \dots].$$