Devoir surveillé n° 5

Durée : 3 heures. Calculatrices non autorisées.
La notation tiendra largement compte de la qualité de la rédaction.
Les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans l'ordre souhaité.
Les exercices qui ne sont pas traités dans l'ordre doivent être rédigés sur des copies séparées.
Le sujet et le brouillon ne sont pas à rendre. Le barème est indicatif.

Exercice 1. *(6 points)* Soit λ dans $\mathbb{R}$. En utilisant la méthode du pivot, résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} x+y+\lambda z &= \lambda \\ x+\lambda y+z &= 1 \\ \lambda x+y+z &= 2-\lambda \end{cases}.$$

On précisera, selon les valeurs de λ, le nombre de pivots et de paramètres du système, et on décrira précisément l'ensemble des solutions obtenu.

Exercice 2. *(6 points)*

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \sqrt{n+\sqrt{n-1+\sqrt{n-2+\cdots+\sqrt{2+\sqrt{1}}}}}$.

1. Montrer que (u_n) diverge vers $+\infty$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer une relation simple entre u_{n+1} et u_n.
3. En déduire par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n \leq n$.
4. À l'aide des résultats précédents, montrer que : $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(n)$.
5. En déduire un équivalent simple de u_{n+1}, puis de u_n.
6. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n - \sqrt{n}$.

Exercice 3. *(8 points)* Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $MM^\intercal M = I_n$.

1. Montrer que si $A \in M_n(\mathbb{R})$ est une matrice symétrique et inversible, alors A^{-1} est symétrique.
2. On note $B = M^\intercal M$ et $C = MM^\intercal$.
   (a) Montrer que B et C sont symétriques et inversibles.
   (b) En déduire que M est symétrique. Que vaut alors M^3 ?
3. Pour $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \in M_n(\mathbb{R})$, on appelle *trace de* A la somme des coefficients diagonaux de A, et on note : $\mathrm{tr}(A) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{ii}$.
   (a) Montrer que : $\forall A, B \in M_n(\mathbb{R}),\ \mathrm{tr}(A+B) = \mathrm{tr}(A) + \mathrm{tr}(B)$.
   (b) Montrer que si A est symétrique, alors $\mathrm{tr}(A^2) \geq 0$, avec égalité si et seulement si $A = 0_n$.
4. On note $a = \mathrm{tr}(M)$ et $b = \mathrm{tr}(M^2)$.
   Exprimer, en fonction de a, b et n : $\mathrm{tr}\left((M-I_n)^2\right)$, $\mathrm{tr}\left((M^2-I_n)^2\right)$ et $\mathrm{tr}\left((M-M^2)^2\right)$.
5. En déduire que $M = I_n$. Conclure.

Problème. *(12 points)*

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'entiers naturels non nuls. On pose alors :

$$\left\{\begin{array}{rcl} p_0 & = & a_0 \\ p_1 & = & a_0 a_1 + 1 \\ \forall n\in\mathbb{N},\ p_{n+2} & = & a_{n+2}p_{n+1}+p_n \end{array}\right. \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{rcl} q_0 & = & 1 \\ q_1 & = & a_1 \\ \forall n\in\mathbb{N},\ q_{n+2} & = & a_{n+2}q_{n+1}+q_n \end{array}\right.,$$

puis : $\forall n\in\mathbb{N},\ x_n = \dfrac{p_n}{q_n}$.

I. Dans cette question uniquement, on suppose que $a_0 = 1$ et : $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ a_n = 2$.
Calculer p_n, q_n et x_n pour tout $n\in[\![0,4]\!]$.

II. 1. Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N},\ q_n \geq n$. Que peut-on en déduire pour la suite (q_n) ?

2. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on note $u_n = p_{n+1}q_n - q_{n+1}p_n$ et $v_n = p_{n+2}q_n - q_{n+2}p_n$.
Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1} = -u_n$. En déduire l'expression explicite de u_n, puis de v_n.

3. En déduire, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $x_{n+1}-x_n$ et $x_{n+2}-x_n$ en fonction des termes de (a_n) et (q_n).

4. Montrer que les suites (x_{2n}) et (x_{2n+1}) sont adjacentes.

5. En déduire que la suite (x_n) est convergente. On notera désormais α sa limite.

III. Pour tout $t\in\mathbb{R}$, on note $\lfloor t\rfloor$ la partie entière de t.

1. Justifier que $x_0 < \alpha < x_1$. En déduire que $a_0 = \lfloor\alpha\rfloor$.

2. Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N},\ x_n = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_n}}}}$.

Question difficile ! On pourra montrer l'égalité aux rangs 0, 1 *et* 2, *puis procéder par récurrence en considérant* $b_0, b_1, \cdots, b_n$ *tels que :* $\forall k\in[\![0,n-1]\!],\ b_k = a_k$ *et* $b_n = a_n + \dfrac{1}{a_{n+1}}$.

3. On note à présent : $\forall n\in\mathbb{N},\ \alpha_n = a_n + \cfrac{1}{a_{n+1} + \cfrac{1}{a_{n+2} + \cfrac{1}{a_{n+3}+\cdots}}}$. En particulier, $\alpha_0 = \alpha$.

Déterminer une relation simple entre α_n, α_{n+1} et a_n.

4. En déduire que : $\forall n\in\mathbb{N}$, $a_n = \lfloor\alpha_n\rfloor$.

5. En déduire un algorithme permettant de déterminer la suite (a_n) à partir de la valeur de α.

6. Déterminer la suite (a_n) pour $\alpha = \sqrt{2}$, puis pour $\alpha = \sqrt{3}$.