Feuille d'exercices 11
ÉLÉMENTS DE CORRECTION

Exercice 4. (d) La suite (u_n) est récurrente linéaire d'ordre 2. L'équation caractéristique associée est : $r^2 = r - 1$, c'est-à-dire $r^2 - r + 1 = 0$, a pour discriminant $\Delta = -3$, donc pour solutions $r_{1,2} = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$. Il existe donc $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \lambda \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^n + \mu \left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)^n$. De plus : $\begin{cases} u_0 = \lambda + \mu & = & 2 \\ u_1 = \lambda\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right) + \mu\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right) & = & -2 \end{cases}$ donc $\begin{cases} \lambda + \mu & = & 2 \\ (\lambda - \mu)\frac{\sqrt{3}}{2} & = & 3i \end{cases}$ donc $\begin{cases} \lambda + \mu & = & 2 \\ \lambda - \mu & = & 2\sqrt{3}i \end{cases}$ donc $\begin{cases} \lambda & = & 1 + i\sqrt{3} \\ \mu & = & 1 - i\sqrt{3} \end{cases}$. Donc : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{(1+i\sqrt{3})^{n+1} - (1-i\sqrt{3})^{n+1}}{2^n}$.

(e) La suite (u_n) est récurrente linéaire d'ordre 2. L'équation caractéristique associée est : $r^2 = 6r - 9$, c'est-à-dire $(r-3)^2 = 0$, de solution double $r_0 = 3$. Il existe donc $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (\lambda n + \mu) \times 3^n$. De plus : $\begin{cases} u_0 = \mu & = & 1 \\ u_1 = 3(\lambda + \mu) & = & 1 \end{cases}$ donc $\begin{cases} \mu & = & 1 \\ \lambda & = & \frac{1}{3} - \mu = -\frac{2}{3} \end{cases}$, donc : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \left(1 - \frac{2n}{3}\right) \times 3^n$.

(f) La suite (u_n) est récurrente linéaire d'ordre 2. L'équation caractéristique associée est : $r^2 = -r - 2$, c'est-à-dire $r^2 + r + 2 = 0$, de discriminant $\Delta = -7$, donc de solution double $r_{1,2} = \frac{-1 \pm i\sqrt{7}}{2}$. Il existe donc $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \lambda \left(\frac{-1+i\sqrt{7}}{2}\right)^n + \mu \left(\frac{-1-i\sqrt{7}}{2}\right)^n$. De plus : $\begin{cases} u_0 = \lambda + \mu & = & 0 \\ u_1 = \lambda\left(\frac{1+i\sqrt{7}}{2}\right) + \mu\left(\frac{1-i\sqrt{7}}{2}\right) & = & 2 \end{cases}$ donc $\begin{cases} \lambda + \mu & = & 0 \\ (\lambda - \mu)\frac{\sqrt{7}}{2} & = & -2i \end{cases}$ donc $\begin{cases} \lambda + \mu & = & 0 \\ \lambda - \mu & = & -\frac{4}{\sqrt{7}}i \end{cases}$ donc $\begin{cases} \lambda & = & -\frac{2}{\sqrt{7}}i \\ \mu & = & +\frac{2}{\sqrt{7}}i \end{cases}$. Donc : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = -\frac{2}{\sqrt{7}}i\left(\frac{-1+i\sqrt{7}}{2}\right)^n + \frac{2}{\sqrt{7}}i\left(\frac{-1-i\sqrt{7}}{2}\right)^n$.

Exercice 5.

(c) Comme $h(\mathbb{R}_+^*) = [2, +\infty[\subset \mathbb{R}_+^*$, (w_n) est bien définie.
On a : $\forall x > 0,\ h(x) > x$, donc la suite (w_n) est croissante. Comme h n'a pas de point fixe, la suite (w_n) diverge donc vers $+\infty$.

Exercice 8.

(d) Soit $A \in \mathbb{R}$. On cherche $N \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geq N,\ -2\sqrt[3]{n} \leq A$. On a :

$$-2\sqrt[3]{n} \leq A \Leftrightarrow \sqrt[3]{n} \geq -\frac{A}{2} \Leftrightarrow n \geq -\frac{A^3}{8}.$$

Donc $N = \max\left(0, -\lceil \frac{A^3}{8} \rceil\right)$ convient. Donc $\left(-2\sqrt[3]{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $-\infty$.

Exercice 9.

(c) Soit $l \in \mathbb{R}$. Prenons $\varepsilon = 1$. Soit $N \in \mathbb{N}$, on cherche $n \geq N$ tel que $|u_n - l| > 1$.
Notons $A = l - 1$. Comme (u_n) tend vers $-\infty$, il existe $N' \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geq N', u_n < A$. Donc : $\forall n \geq N', |u_n - l| > 1$. Donc $n = \max(N, N')$ convient.
Donc (u_n) diverge.

Exercice 11. Soit $\lambda > 0$. Soit $A \in \mathbb{R}$. Soit $N \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geq N,\ u_n \geq \dfrac{A}{\lambda}$. Alors : $\forall n \geq N,\ \lambda u_n \geq A$. Donc $\lambda u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

De même : soit $\lambda < 0$. Soit $A \in \mathbb{R}$. Soit $N \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geq N,\ u_n \geq \dfrac{A}{\lambda}$. Alors : $\forall n \geq N,\ \lambda u_n \leq A$. Donc $\lambda u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$.
Si $\lambda = 0$, la suite (λu_n) est trivialement nulle.

Exercice 12. Soit $m, M \in \mathbb{R}$ tels que : $\forall n \in \mathbb{N},\ m \leq u_n \leq M$.
Si $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$: soit $A \in \mathbb{R}$. Soit $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N,\ v_n \geq A - m$. Alors : $\forall n \geq N,\ u_n + v_n \geq A$. Donc $u_n + v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
Si $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$: soit $\varepsilon > 0$. Soit $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N,\ |v_n| \leq \dfrac{\varepsilon}{\max(|m|, |M|)}$. Alors : $\forall n \geq N,\ |u_n v_n| \leq \varepsilon$. Donc $u_n v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Exercice 13.
(a) Soit $\varepsilon > 0$. Soit $N \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geq N,\ |u_n - \ell| \leq \varepsilon$. Alors, d'après l'inégalité triangulaire renversée : $||u_n| - |\ell|| \leq |u_n - \ell| \leq \varepsilon$. Donc $(|u_n|)$ converge vers $|\ell|$.
(b) Soit $A < 0$. Soit $N \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geq N,\ u_n \leq A$. Alors : $\forall n \geq N,\ |u_n| \geq |A|$. Donc $(|u_n|)$ tend vers $+\infty$.

Exercice 14.
(e) $y_n = \dfrac{6^n}{3^n}(1 + \dfrac{1}{6^n})((\dfrac{1}{2})^n + 1)$, où $\dfrac{6^n}{3^n} = 2^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, et $(1 + \dfrac{1}{6^n})((\dfrac{1}{2})^n + 1) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$, donc $y_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
(f) $z_n = (2^n - 3^n)(n^2 - 6) = 3^n \times n^2 \times \left(\dfrac{2^n}{3^n} - 1\right)\left(1 - \dfrac{6}{n^2}\right)$, où $3^n \times n^2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, et $\left(\dfrac{2^n}{3^n} - 1\right)\left(1 - \dfrac{6}{n^2}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -1$, donc $z_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$.

Exercice 17.
(e) $\dfrac{n-1}{2+1} \leq y_n \leq \dfrac{n+1}{2-1}$. Or $\dfrac{n-1}{2+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ donc, d'après le théorème de divergence par minoration, $y_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
(f) $\dfrac{n^3-1}{n^2+1} \leq z_n \leq \dfrac{n^3+1}{n^2+1}$. Or $\dfrac{n^3-1}{n^2+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ donc, d'après le théorème de divergence par minoration, $z_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Exercice 19. (c) On a : $\forall n \in \mathbb{N}^*$,
- $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}} - 2\sqrt{n+1} + 2\sqrt{n} = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}} - \dfrac{2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$
$= \dfrac{\sqrt{n} - \sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})} < 0,$

- $v_{n+1} - v_n = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}} - 2\sqrt{n+2} + 2\sqrt{n+1} = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}} - \dfrac{2}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}$
  $= \dfrac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2})} > 0,$
- $u_n - v_n = 2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n} = \dfrac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$

donc (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

Exercice 21.

(a) Immédiat (cf exo 11)

(b) C'est le théorème de divergence par minoration.

(c) D'après la formule du binôme de Newton : $(1+a)^n \geq 1 + \binom{n}{1} a = 1 + an$.

(d) Notons $q = 1 + a$ (c'est-à-dire $a = q - 1 > 0$). Alors : $q^n = (1+a)^n \geq 1 + an$ d'après (c) et, d'après (a), (an) tend vers $+\infty$ donc, d'après (b), (q^n) tend vers $+\infty$.

Exercice 22. Comme π admet une infinité de décimales, il existe au moins un chiffre $k \in [\![0, 9]\!]$ qui apparaît une infinité de fois dans la suite (u_n) (en fait, comme π est irrationnel, il en existe au moins deux). Donc (u_n) admet comme sous-suite la suite constante égale à k, qui est convergente.

Exercice 26.

(e) $y_n = \dfrac{e^{n^2} + e^{-n^2}}{2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{e^{n^2}}{2}$,

(f) Comme $\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, $z_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{(-1)^n}{2\sqrt{n}}$.

Exercice 27.

(e) $y_n = 2n\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{4n}} - 1\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} 2n \times \dfrac{1}{8n} = \dfrac{1}{4}$, donc $y_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{1}{4}$,

(f) $z_n = \dfrac{n^3 \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) + n}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} n^2 \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} n$, donc $z_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.