Corrigé du TD 26 (Familles sommables)

Exercice 1 : (Sommation par paquets)
Soit $q \in \mathbb{C}$ tel que $|q| < 1$. Etablir que $(n(n-1)q^{|n|})_{n\in\mathbb{Z}}$ est sommable. En donner la somme.
Solution :
On pose, pour $n \in \mathbb{Z}$, $a_n = n(n-1)q^{|n|}$.
La sommabilité de $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ équivaut (cf cours) aux convergences absolues des deux séries $\sum\limits_{n\geq 0} a_n$ et $\sum\limits_{n\geq 1} a_{-n}$.
Ces deux convergences viennent clairement du fait que le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\geq 0} z^n$ vaut 1.
Pour la somme, notée S, il vient (en reconnaissant des dérivées terme à terme) :
$S = \sum\limits_{n=0}^{\infty} n(n-1)q^n + \sum\limits_{n=1}^{\infty} n(n+1)q^n = q^2(\dfrac{1}{1-q})'' + q(\dfrac{1}{1-q})''$.
Soit $\boxed{S = \dfrac{2q^2+2q}{(1-q)^3}}$■.

Exercice 2 : (Fubini)
Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$. Prouver que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{z^n}{1-z^n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} d(n)z^n$, où $d(n)$ est le nombre de diviseurs positifs de n.
(On tranformera la somme de gauche en somme double).
Solution :
On vérifie le sens des deux membres de l'égalité à prouver.
a) Pour $n \to \infty$, $|\dfrac{z^n}{1-z^n}| \sim |z|^n$ et la série géométrique $\sum\limits_{n\geq 0} z^n$ est ACV puisque $|z| < 1$. Membre de gauche légitime.
b) Pour tout $n \geq 1$, $1 \leq d(n) \leq n$ donc par propriété encadrement du rayon de convergence : $\rho(\sum\limits_{n\geq 0} d(n)z^n) = 1$. Idem pour le second membre.
A l'aide de l'identité $\dfrac{1}{1-u} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} u^n$, valable si $|u| < 1$, nous avons $\dfrac{z^n}{1-z^n} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} z^{n(k+1)} = \sum\limits_{m=1}^{\infty} z^{nm}$.
De sorte que $S = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{z^n}{1-z^n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\sum\limits_{m=1}^{\infty} z^{nm}$. Nous avons bien transformé la somme de gauche en somme double pour laquelle on espère utiliser Fubini.
Cela provient du fait que la somme double $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sum\limits_{m=1}^{\infty} |z|^{nm}$ est finie puisqu'elle vaut $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{|z|^n}{1-|z|^n}$ ainsi nous pouvons affirmer que (on a posé A_n comme étant l'ensemble des multiples non nuls de l'entier naturel n):
$S = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \sum\limits_{p\in A_n} z^p = S = \sum\limits_{p=1}^{\infty}(\sum\limits_{n|p} z^p) = \sum\limits_{p=1}^{\infty} d(p)z^p$■.

Exercice 3 : (Fubini?)
On pose, pour $(p,q) \in \mathbb{N}^2$, $a_{p,q} = \dfrac{1}{p^2-q^2}$ si $p \neq q$ et $a_{p,p} = 0$.
Comparer $\sum\limits_{p=0}^{\infty}(\sum\limits_{q=0}^{\infty} a_{p,q})$ à $\sum\limits_{q=0}^{\infty}(\sum\limits_{p=0}^{\infty} a_{p,q})$. Conclusion?

Exercice 4 : (Série de restes)
Calculer $\sum\limits_{p=1}^{\infty}\sum\limits_{q=p}^{\infty} \dfrac{(-1)^q}{q^3}$ en fonction de $\zeta(2)$.

Exercice 5 : (Centrale des sixties)
Soient p, q des entiers naturels non nuls.
On réordonne les termes de la série harmonique alternée en prenant tour à tour p termes positifs et q termes négatifs.
Montrer que cette série converge et en calculer la somme notée $S(p,q)$.
(NB : $S(p,p) = \ln(2)$).
Solution :
Puisque le terme général de cette série tend vers 0, on peut évaluer les sommes partielles en les groupant par paquets de longueur constante : ici $p+q$.
Ainsi pour $n \geq 1$, nous posons S_n comme étant la somme des $n(p+q)$ termes de la série harmonique perturbée suivant le protocole donné par l'énoncé.
On a donc $S_n = \sum_{k=1}^{np} \frac{1}{2k-1} - \sum_{k=1}^{nq} \frac{1}{2k} = H_{2np} - \frac{1}{2}H_{np} - \frac{1}{2}H_{nq}$.
Via le développement asymptotique $H_m = \ln(m) + o(1)$ pour $m \to \infty$, il vient aussi (si $n \to \infty$) :
$S_n \to \ln(2) + \frac{1}{2}\ln(p/q)$.
Notre série converge bien et $\boxed{S(p,q) = \ln(2) + \frac{1}{2}\ln(p/q)}$ ■.

Exercice 6 : (X)
1) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Vérifier que $\int_{-1}^{1} P(t)dt = -i\int_0^{\pi} P(e^{i\theta})e^{i\theta}d\theta$.
En déduire que $2\int_0^1 P^2(t)dt \leq \int_{-\pi}^{\pi} |P(e^{i\theta})|^2 d\theta$.
2) Soient $2n$ réels positifs $a_1, ..., a_n$, $b_1, ...b_n$.
Montrer que $\sum_{p=1}^{n}(\sum_{q=1}^{n} \frac{a_p + b_q}{p+q}) \leq \pi\sqrt{\sum_{p=1}^{n} a_p^2}\sqrt{\sum_{q=1}^{n} b_q^2}$.
3) Soient $(a_p)_{p\in\mathbb{N}}$ et $(b_q)_{q\in\mathbb{N}}$ deux suites de complexes dont les carrés sont sommables.
Prouver que la famille $(\frac{a_p + b_q}{p+q})_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable.