Devoir à la maison n° 8

Exercice 1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite convergente vers $l \in \mathbb{R}$. On définit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n = \frac{u_1 + \ldots + u_n}{n}.$$

On va montrer que la suite (v_n) est également convergente vers l.

1. On suppose dans un premier temps que $l = 0$. Soit $\varepsilon > 0$.
   (a) Montrer qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geq N,\ |v_n| \leq \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{N} |u_k| + \dfrac{n-N}{n}\varepsilon.$
   (b) En déduire que la suite (v_n) est convergente vers 0.
2. Dans le cas général, montrer que la suite (v_n) converge vers l. On pourra considérer la suite (x_n) de terme général $x_n = u_n - l$.
3. Application : Déterminer la limite de la suite de terme général $v_n = \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{2n} + \ldots + \dfrac{1}{n^2}$.

Exercice 2. On considère, pour $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $f_n : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & e^x + x - n \end{array} \right.$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $f_n(x) = 0$ a exactement une solution. On l'appelle x_n.
2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $f_n(x_{n+1})$. En déduire que (x_n) est croissante, puis qu'elle tend vers $+\infty$.
3. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq x_n < \ln(n)$.
   En déduire que $\left(\dfrac{x_n}{n}\right)$ converge vers 0, puis que $\ln\left(1 - \dfrac{x_n}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{=} o(\ln n)$.
4. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $x_n = \ln(n) + \ln\left(1 - \dfrac{x_n}{n}\right)$. En déduire que $x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln n$.
5. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $y_n = x_n - \ln n$.
   Déterminer l'équation vérifiée par y_n, et en déduire un équivalent de y_n.