Devoir à la maison n° 7
CORRIGÉ

Exercice 1. On applique la méthode du pivot comme suit :

$$\left\{\begin{array}{rrrcl} x & +y & -2z & = & 0 \\ x & +2my & -4mz & = & 1-2m \\ mx & +y & -mz & = & 1 \end{array}\right. \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - mL_1}}{\Leftrightarrow} (E_1)\left\{\begin{array}{rrrcl} \boxed{x} & +y & -2z & = & 0 \\ & (2m-1)y & -(4m-2)z & = & 1-2m \\ & (1-m)y & +mz & = & 1 \end{array}\right.$$

$$\underset{\substack{L_2 \leftarrow \frac{1}{2m-1}L_2 \\ \textbf{si } 2m-1 \neq 0}}{\Leftrightarrow} (E_2)\left\{\begin{array}{rrrcl} \boxed{x} & +y & -2z & = & 0 \\ & \boxed{y} & -2z & = & -1 \\ & (1-m)y & +mz & = & 1 \end{array}\right.$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3-(1-m)L_2}{\Leftrightarrow} \left\{\begin{array}{rrrcl} \boxed{x} & +y & -2z & = & 0 \\ & \boxed{y} & -2z & = & -1 \\ & & (2-m)z & = & 2-m \end{array}\right.$$

$$\underset{\substack{L_3 \leftarrow \frac{1}{2-m}L_3 \\ \textbf{si } 2-m \neq 0}}{\Leftrightarrow} \left\{\begin{array}{rrrcl} \boxed{x} & +y & -2z & = & 0 \\ & \boxed{y} & -2z & = & -1 \\ & & \boxed{z} & = & 1 \end{array}\right.$$

$$\underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 + 2L_3 \\ L_1 \leftarrow L_1 + 2L_3}}{\Leftrightarrow} \left\{\begin{array}{rrrcl} \boxed{x} & +y & & = & 2 \\ & \boxed{y} & & = & 1 \\ & & \boxed{z} & = & 1 \end{array}\right.$$

$$\underset{L_1 \leftarrow L_1 - L_2}{\Leftrightarrow} \left\{\begin{array}{rrrcl} \boxed{x} & & & = & 1 \\ & \boxed{y} & & = & 1 \\ & & \boxed{z} & = & 1 \end{array}\right.$$

C'est un système de Cramer. L'ensemble de ses solutions est le point de $\mathbb{R}^3$ $S = \{(1,1,1)\}$.

Il reste à traiter les cas particuliers :

- Si $2m-1=0$:

$$(E_1) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rrrcl} \boxed{x} & +y & -2z & = & 0 \\ & & 0 & = & 0 \\ & \frac{1}{2}y & +\frac{1}{2}z & = & 1 \end{array}\right. \underset{L_3 \leftarrow 2L_3}{\Leftrightarrow} \left\{\begin{array}{rrrcl} \boxed{x} & +y & -2z & = & 0 \\ & \boxed{y} & +z & = & 2 \end{array}\right.$$

$$\underset{L_1 \leftarrow L_1 - L_2}{\Leftrightarrow} \left\{\begin{array}{rrrcl} \boxed{x} & & -3z & = & -2 \\ & \boxed{y} & +z & = & 2 \end{array}\right. .$$

C'est un système à 2 pivots et 1 paramètre. L'ensemble de ses solutions est :

$$S = \{(-2+3z, 2-z, z) \mid z \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}(3,-1,1) + (-2,2,0),$$

c'est-à-dire la droite de $\mathbb{R}^3$ de vecteur directeur $(3,-1,1)$ et passant par le point $(-2,2,0)$.

- Si $2-m=0$:

$$(E_2) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccccc} \boxed{x} & +y & -2z & = & 0 \\ & \boxed{y} & -2z & = & -1 \\ & & 0 & = & 0 \end{array}\right. \underset{L_1 \leftarrow L_1 - L_2}{\Leftrightarrow} \left\{\begin{array}{ccccc} \boxed{x} & & & = & 1 \\ & \boxed{y} & -2z & = & -1 \end{array}\right. .$$

C'est un système à 2 pivots et 1 paramètre. L'ensemble des solutions est :

$$S = \{(1, -1+2z, z) \mid z \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}(0,2,1) + (1,-1,0),$$

c'est-à-dire la droite de $\mathbb{R}^3$ de vecteur directeur $(0,2,1)$ et passant par le point $(1,-1,0)$.

Exercice 2.

1. On détermine l'inversibilité de P par la méthode du pivot :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right), \quad \underset{\substack{L_1 \leftrightarrow L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{\substack{L_2 \leftarrow -L_2 \\ L_3 \leftarrow \frac{L_3}{6}}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{array}\right)$$

$$\underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 + 2L_3 \\ L_1 \leftarrow L_1 - L_3}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{5}{6} & -\frac{1}{6} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{array}\right)$$

$$\underset{L_1 \leftarrow L_1 - L_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{array}\right).$$

La matrice P est donc équivalente par lignes à la matrice identité, donc P est inversible et :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 0 & 3 & -3 \\ -2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Un calcul direct donne :

$$MP = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix},$$

puis

$$D = P^{-1}MP = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 0 & 3 & -3 \\ -2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

3. D'après la question précédente, on a : $M = PDP^{-1}$.
La formule voulue est donc vérifiée pour $n = 0$ et $n = 1$. De plus, si elle est vérifiée à un rang $n \in \mathbb{N}$ quelconque, alors, par associativité du produit matriciel :
$$M^{n+1} = M^n M = (PD^n P^{-1})(PDP^{-1}) = PD^n(P^{-1}P)DP^{-1} = PD^{n+1}P^{-1},$$
donc la formule est vérifiée au rang $n + 1$. Donc par récurrence, la formule est vérifiée pour tout rang $n \in \mathbb{N}$.
4. Comme D est diagonale, on a directement :
$$D^0 = I_3, \text{ et } : \forall n \in \mathbb{N}^*, \ D^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix},$$
donc : $M^0 = I_3$, et : $\forall n \in \mathbb{N}^*$,
$$M^n = PD^nP^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2^{n+2} + 2 \times (-1)^n & 2^{n+1} - 2 \times (-1)^n & 2^{n+1} - 2 \times (-1)^n \\ 2^{n+1} - 2 \times (-1)^n & 2^n + 2 \times (-1)^n & 2^n + 2 \times (-1)^n \\ 2^{n+1} - 2 \times (-1)^n & 2^n + 2 \times (-1)^n & 2^n + 2 \times (-1)^n \end{pmatrix}.$$