Chapitre 14 : Logique et raisonnement

Table des matières

1 Logique

1.1 Connecteurs élémentaires

Définition 1 (Assertion)**.**

Une *assertion* est un énoncé mathématique qui peut prendre deux valeurs : **vrai** (V) ou **faux** (F).

■ Exemple 1:
Les phrases suivantes sont des assertions :

- « 2 est un entier impair » (**F**)
- « $(100+1)^2 = 10\,000 + 200 + 1$ » (**V**)

La suivante n'est pas une assertion :

- « a+=2 »

Définition 2 (Négation d'une assertion)**.**

Étant donnée une proposition P, on appelle « *négation de* P » et on note *non* P ou $\neg P$ la proposition définie par :

- $\neg P$ est vraie lorsque P est fausse ;
- $\neg P$ est fausse lorsque P est vraie.

▶ Exercice 1

Écrire la négation des assertions suivantes :

1. « 2 est un entier impair »

2. $n \in \mathbb{N}$

3. $x \geqslant 1$

4. $y > x$

Définition 3 (Conjonction)**.**

Étant données deux propositions P et Q, on définit la proposition « *conjonction de* P *et* Q » notée P *et* Q ou $P \wedge Q$ telle que :

- $P \wedge Q$ est vraie lorsque P et Q sont vraies ;
- $P \wedge Q$ est fausse lorsque l'une au moins des deux propositions P ou Q sont fausses.

▶ Exercice 2

Écrire sous forme de conjonction l'assertion $-1 < x \leqslant 1$.

Définition 4 (Disjonction)**.**

Étant données deux propositions P et Q, on définit la proposition « *disjonction de* P *et* Q » notée P *ou* Q ou $P \vee Q$ telle que :

- $P \vee Q$ est vraie lorsque l'une des propositions P ou Q sont vraies ;
- $P \vee Q$ est fausse lorsque P et Q sont fausses.

▶ Exercice 3

Écrire sous la forme d'une disjonction l'assertion $x \in]-\infty\,;\,-2] \cup]1\,;\,+\infty[$.

Définition 5 (Implication)**.**

Étant données deux propositions P et Q, on définit la proposition « *implication de* Q *et* P » notée $P \implies Q$ définie par $(\neg P \vee Q)$, ainsi :

- $P \implies Q$ est vraie lorsque P est fausse ou Q est vraie ;
- $P \implies Q$ est fausse lorsque P est vraie et Q est fausse.

Remarque 1 (Lecture de l'implication).

La proposition $P \implies Q$ se lit « P implique Q » ou « Si P alors Q ».
Lorsque $P \implies Q$ est vraie, on dit que P est une **condition suffisante** pour avoir Q et que Q est une **condition nécessaire** pour avoir P.

▶ Exercice 4

Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

1. $(2 = 3) \implies (1 + 1 = 2)$
2. $(2 = 3) \implies (1 = 5)$
3. $(1 + 1 = 2) \implies 2 = 3$
4. $(4 = 5) \implies$ Je suis le Pape

▶ Exercice 5

Donner la négation des assertions suivantes :

1. S'il pleut, alors je prends mon parapluie.
2. $-2 \leqslant x < 1$

Définition 6 (Réciproque).

Étant données deux propositions P et Q, on appelle *réciproque* de l'implication $P \implies Q$ la proposition $Q \implies P$.

Définition 7 (Contraposée).

Étant données deux propositions P et Q, on appelle *contraposée* de l'implication $P \implies Q$ la proposition $\neg Q \implies \neg P$.

Définition 8 (Équivalence).

Étant données deux propositions P et Q, on appelle *équivalence entre P et Q* et on note $(P \iff Q)$ la proposition définie par $(P \implies Q) \wedge (Q \implies P)$.

■ **Exemple 2:**

- $x^2 - 1 = 0 \iff (x = 1$ ou $x = -1)$
- $(x - 1)^2 + y^2 = 0 \iff (x = 1$ et $y = 0)$

Remarque 2 (Lecture de l'équivalence).

La proposition $P \iff Q$ se lit « P équivaut à Q » ou « P si et seulement si Q ».
Lorsque $P \iff Q$ est vraie, on dit que P est une **condition nécessaire et suffisante** pour avoir Q.

On peut représenter ces définitions sous la forme d'une « table de vérité » :

P	Q	$\neg P$	$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$P \implies Q$	$P \iff Q$
V	V	F	V	V	V	V
V	F	F	F	V	F	F
F	V	V	F	V	V	F
F	F	V	F	F	V	V

Remarque 3.

Les opérateurs $\neg$, $\wedge$, $\vee$ sont des opérateurs sur les propositions qui permettent d'en générer de nouvelles. Attention au sens précis qu'ont ces opérateurs et éviter les confusions avec les mots français « ET », « OU ».
On peut les mettre en parallèle avec les opérateurs $\overline{A}$, $\cap$ et $\cup$ qui agissent sur les ensembles.

▶ Exercice 6

1. En utilisant une table de vérité, démontrer que :

(a) l'implication $(P \implies Q)$ est équivalente à sa contraposée $(\neg Q \implies \neg P)$.

(b) $\neg(P \wedge Q)$ équivaut à $\neg P \vee \neg Q$

(c) $\neg(P \vee Q)$ équivaut à $\neg P \wedge \neg Q$

2. Étant données les propositions P, Q et R, construire les tables de vérité des propositions suivantes :

(a) $P \vee \neg P$

(b) $P \wedge \neg P$

(c) $\neg Q \vee P$

(d) $[(P \implies Q) \wedge (Q \implies R)] \implies (P \implies R)$.

1.2 Quantificateurs

Soit une propriété dépendant d'un paramètre x, où x est un élément d'un ensemble E.

Définition 9 (quantificateur universel)**.**

On écrit

$$\forall x \in E,\ P(x)$$

pour signifier que la propriété $P(x)$ est vraie pour tous les éléments x de E.
Le symbole $\forall$ est appelé **quantificateur universel** et se lit « Pour tout » ou « quel que soit ».

Définition 10 (quantificateur existentiel).

On écrit

$$\exists x \in E,\ P(x)$$

pour signifier que la propriété $P(x)$ est vraie pour au moins un élément x de E.
Le symbole $\exists$ est appelé **quantificateur existentiel** et se lit « il existe ».

▶ EXERCICE 7

Dire si les assertions suivantes sont vraies ou fausses :

1. « $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 + 1 \geqslant 0$ »
2. « $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 - 1 \geqslant 0$ »
3. « $\exists x \in \mathbb{R},\ x^2 - 1 \geqslant 0$ »
4. « $\forall x < 2,\ x^2 < 4$ »
5. « $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 = 4 \iff x = 2$ »

Propriété 1 (Négation des propositions avec quantificateurs).

- La négation de la proposition $\forall x \in E,\ P(x)$ est :

$$\exists x \in E,\ \neg P(x)$$

- La négation de la proposition $\exists x \in E,\ P(x)$ est :

$$\forall x \in E,\ \neg P(x)$$

▶ EXERCICE 8

Soit (u_n) une suite de nombres réels et f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Écrire avec des quantificateurs les propositions suivantes :

1. La suite (u_n) est majorée par 4.
2. La suite (u_n) est majorée.
3. La suite (u_n) n'est pas majorée.
4. La suite (u_n) est bornée.
5. La suite (u_n) est croissante.
6. La suite (u_n) est constante.
7. La fonction f est la fonction nulle.
8. La fonction f s'annule.
9. La fonction f est croissante.
10. La fonction f admet un maximum.

2 Modes de raisonnement

2.1 Disjonction de cas

▶ EXERCICE 9

1. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ n(n+1)$ est pair
2. Démontrer que $\forall x \in \mathbb{R},\ |x-1| \leqslant x^2 - x + 1$

2.2 Démonstration par l'absurde

▶ EXERCICE 10

Démontrer qu'il n'y a pas de nombre entier plus grand que tous les autres.

▶ EXERCICE 11

Soit $n_1, \cdots, n_9$ des entiers naturels tels que $n_1 + \ldots + n_9 = 90$.
Démontrer qu'il existe trois de ces entiers dont la somme est supérieure à 30.

▶ EXERCICE 12

Démontrer qu'une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ définie par $f(0) = 1$ et telle que $f' = f$ ne s'annule pas.
On pourra utiliser la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = f(x) \times f(-x)$

2.3 Démontrer une implication

2.3.1 Méthode directe

▶ EXERCICE 13

Démontrer que si $x \in \mathbb{Q}$ alors $1 + x \in \mathbb{Q}$

2.3.2 Par contraposition

▶ EXERCICE 14

Démontrer que $\forall \varepsilon > 0,\ |a| < \varepsilon \implies a = 0$.

2.4 Démontrer une équivalence

2.4.1 Par raisonnement direct

On dit qu'on raisonne par « équivalences successives ».

■ **Exemple 3:**

Lorsqu'on résout une équation (ou une inéquation), on procède par équivalences successives.

$$(x-1)(3x+4) = 2x^2 - 2 \quad (1)$$
$$\iff (x-1)(3x+4) - 2(x-1)(x+1) = 0 \quad (2)$$
$$\iff (x-1)\left(3x+4-2(x+1)\right) = 0 \quad (3)$$
$$\iff (x-1)(x+2) = 0 \quad (4)$$
$$\iff x = 1 \text{ ou } x = -2 \quad (5)$$

2.4.2 Par double implication

On effectuera deux raisonnements par implication, « sens direct » et « sens réciproque »

■ **Exemple 4:**

Pour prouver qu'une droite dans le plan repéré admet une équation de la forme $ax + by = c$, on montre que

- **Si** d est une droite, **alors** d admet une équation de la forme $ax + by = c$, où a, b et c sont trois réels tels que $(a, b) \neq (0, 0)$.
- **Si** $A\,(x_1\,;\,y_1)$, $B\,(x_2\,;\,y_2)$ et $C\,(x_3\,;\,y_3)$ ont leurs coordonnées qui vérifient une même équation de la forme $ax + by = c$, où a, b et c sont trois réels tels que $(a, b) \neq (0, 0)$, alors les points A, B et C sont alignés.

▶ EXERCICE 15

Démontrer que pour tout n est un entier relatif, (n est pair) $\iff$ (n^2 est pair).
Pour le sens réciproque, on pourra procéder par contraposition

▶ EXERCICE 16

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $2x = \sqrt{x^2 + 1}$

2.5 Utiliser un contre-exemple

Un contre-exemple est une méthode qui permet de prouver qu'une propriété qui s'écrit avec un quantificateur universel est fausse. Pour prouver que « $\forall x \in E$, $P(x)$ » est fausse, vous prouvez que « $\exists x \in E$, $\neg P(x)$ » est vraie.

▶ EXERCICE 17

Démontrer que la fonction $f\colon x \mapsto \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$ n'est pas paire.

2.6 Raisonner par analyse-synthèse

Ce raisonnement permet de résoudre un problème ou une équation dont on ne voit pas de solution directe. Il se déroule donc en 2 étapes :

- Phase d'**analyse** : on suppose le problème résolu et on déduit des conditions sur nécessaires
- Phase de **synthèse** : on vérifie sur les conditions sont suffisantes et on conclut sur le problème.

▶ EXERCICE 18

Démontrer que toute fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

▶ EXERCICE 19

Résoudre l'équation

$$\ln(3x + 1) + \ln(x + 1) = 0$$

▶ EXERCICE 20

Trouver toutes les fonctions $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \quad f(x)f(y) = f(xy) + x + y$$