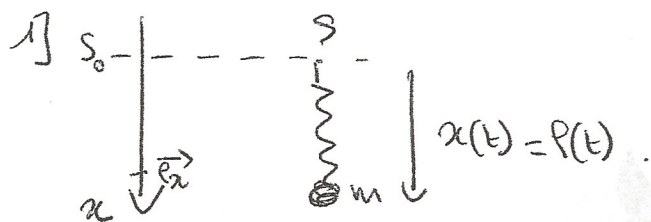


Ex 1 Principe d'un sinographe (Ago 2020)

Concours TD
oscillateurs mécaniques

Simulabre.



$$\vec{P} = mg \vec{e}_x$$

$$\vec{T} = -k(p - p_0) \vec{e}_x = -k(x - p_0) \vec{e}_x$$

$$\vec{s}_m = x(t) \vec{e}_x \rightarrow \vec{v}_m = \frac{d}{dt}(\vec{s}_m) = \dot{x} \vec{e}_x$$

$$\vec{a} = \ddot{x} \vec{e}_x \Rightarrow \vec{F}_g = -\beta \ddot{x} \vec{e}_x$$

À l'équilibre $\vec{P} + \vec{T} = \vec{0}$

$$mg - k(x_{eq} - p_0) = 0 \rightarrow \boxed{x_{eq} = p_0 + \frac{mg}{k}}$$

2°] PFD $\vec{P} + \vec{T} + \vec{F}_g = m \vec{a} \Rightarrow mg - k(x(t) - p_0) - \beta \ddot{x} = m \ddot{x}$
ds Regelien:

$$m \ddot{x} + \beta \ddot{x} + kx = mg + kp_0 = k \left(p_0 + \frac{mg}{k} \right)$$

donc $\boxed{\ddot{x} + \frac{\beta}{m} \dot{x} + \frac{k}{m} x = \frac{k}{m} x_{eq}}$

3°] En posant $y = x - x_{eq}$: (y = écart à la position d'équilibre)

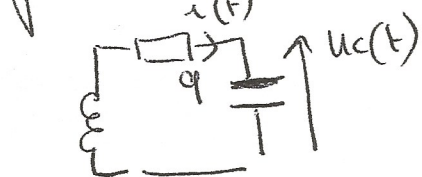
$$\boxed{\ddot{y} + \frac{\beta}{m} \dot{y} + \frac{k}{m} y = 0}$$

On pose $\begin{cases} \frac{k}{m} = \omega^2 \\ \frac{\beta}{m} = 2\lambda = (2\alpha\omega) \end{cases}$
↑
Coefficient d'amortissement

4°] Circuit R-L-C série

de charge d'un condensateur. $\Rightarrow$ n équation différentielle

par $U_C(t)$ et $q(t)$



$$\begin{cases} Ri + L \frac{di}{dt} + U_C = 0 \\ i = C \frac{dU_C}{dt} = \frac{dq}{dt} \end{cases} \Rightarrow$$

$$LC \ddot{U}_C + RC \dot{U}_C + U_C = 0$$

$$\ddot{U}_C + \frac{R}{L} \dot{U}_C + \frac{1}{LC} U_C = 0$$

ou $R\dot{q} + L\ddot{q} + \frac{q}{C} = 0$

à comparer à $\beta \ddot{x} + m \ddot{x} + kx = 0$

(1)

$$m \leftrightarrow L$$

$$\beta \leftrightarrow R$$

$$k \leftrightarrow \frac{1}{C}$$

on retrouve alors

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \leftrightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$$

5°] S est mobile ds Ro galiléen.

$$\vec{SOS} = a \cos \omega t \vec{e}_n$$

$$\text{et } \vec{SM} = \rho(t) \vec{e}_n = X(t) \vec{e}_n$$

$$\vec{SON} = x_M \vec{e}_n$$

$$\text{or } \vec{SON} = \vec{SOS} + \vec{SM} \Rightarrow \boxed{\vec{SON} = x_M \vec{e}_n = [a \cos \omega t + X(t)] \vec{e}_n}$$

$$\text{et } \boxed{x_M = x_S + X}$$

$$\Rightarrow \ddot{x}_M = \ddot{x}_S + \ddot{X} = \boxed{-a\omega^2 \cos \omega t + \ddot{X} = \ddot{x}_M}$$

$$\text{et } \ddot{X} = \ddot{Y}$$

PFD ds Ro. $\downarrow$ So (fixé ds Ro)

$$m \vec{a}_{O/R_0} = \vec{P} + \vec{T} + \vec{F}_g$$

$$\text{et } \vec{a}_{O/R_0} = \frac{d^2 \vec{SON}}{dt^2} = (\ddot{X} - a\omega^2 \cos \omega t) \vec{e}_n$$

$$\vec{T} = -R(X(t) - \rho_0) \vec{e}_n$$

$$\vec{F}_g = -\beta \cdot \frac{d\vec{SM}}{dt} \vec{e}_n = -\beta \dot{X} \vec{e}_n$$

mlème/s

En projetant / $\vec{e}_n$

$$m [\ddot{X} - a\omega^2 \cos \omega t] = mg - R(X - \rho_0) - \beta \dot{X}$$

et $Y = X - x_{eq}$ d'où $m \ddot{Y} + \beta \dot{Y} + RY = ma\omega^2 \cos \omega t$

$$\text{or } \boxed{\ddot{Y} + \frac{\beta}{m} \dot{Y} + \frac{R}{m} Y = a\omega^2 \cos \omega t} \quad \text{ou} \quad \boxed{\ddot{Y} + \cancel{\beta} \dot{Y} + \omega^2 Y = a\omega^2 \cos \omega t}$$

6°] On pose $Y(t) = A \cos(\omega t + \varphi) \rightarrow Y(t) = A e^{j\varphi} e^{j\omega t} = \underline{Y} e^{j\omega t}$

$$a\omega^2 \cos \omega t \rightarrow a\omega^2 e^{j\omega t}$$

$Y(t)$ vérifie la même équation différentielle que $Y(t)$ d'où

$$(\omega^2 + \cancel{\beta} j\omega + \omega^2) \underline{Y} = a\omega^2$$

$$\underline{Y} = \frac{a\omega^2}{-\omega^2 + j2\lambda\omega + \omega^2} = \frac{a}{-1 + j\frac{2\lambda}{\omega} + \frac{\omega^2}{\omega^2}}$$

avec $u = \frac{\omega}{\omega_0}$.

On obtient $\underline{Y} = \frac{a}{-1 + j\frac{2\lambda}{\omega} + \frac{\omega^2}{\omega^2}} = \frac{a}{-1 + j\frac{1}{Q} + u^2} = A e^{j\varphi}$

$Q = \frac{\omega_0}{2\lambda} \Rightarrow 2\lambda = \frac{\omega_0}{Q}$

En prenant le module de cette relation.

$$A = \frac{a}{\sqrt{\left(\frac{1}{u^2} - 1\right)^2 + \frac{1}{Q^2 u^2}}}$$

On pose $z = \frac{1}{u}$.

$A = \frac{a}{\sqrt{(z^2 - 1)^2 + \frac{z^2}{Q^2}}}$ max si $\frac{d}{dz} \left((z^2 - 1)^2 + \frac{z^2}{Q^2} \right) = 0$.

donc $4z(z^2 - 1) + \frac{2z}{Q^2} = 0 \Rightarrow 2z \left[(z^2 - 1) + \frac{1}{2Q^2} \right] = 0 \Rightarrow z^2 = 1 - \frac{1}{2Q^2}$

à condition que $1 - \frac{1}{2Q^2} > 0 \Rightarrow 2Q^2 > 1 \rightarrow \boxed{Q > \frac{1}{\sqrt{2}}}$ et $u_{\text{max}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}}$

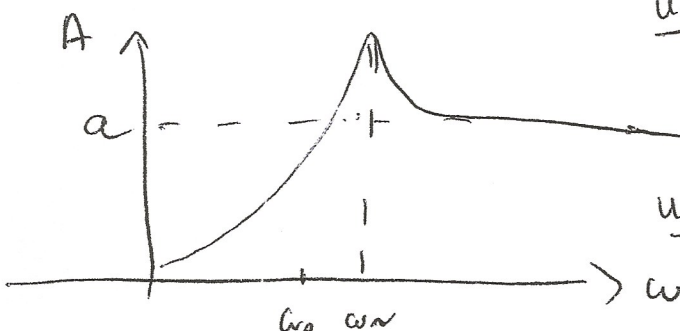
AN $\begin{cases} u_{\text{max}} = 1,92 \\ R = 95 \text{ Nm}^{-1} \\ m = 2\omega g = 0,2 \text{ kg} \end{cases}$

$$Q = \frac{1}{\sqrt{2 - \frac{2}{u_{\text{max}}^2}}} = 1,3$$

Il peut y avoir résonance.

$\beta = 2m\lambda = m \frac{\omega_0}{Q} = \frac{\sqrt{Rm}}{Q} = 0,24 \text{ kg s}^{-1} = \beta$

g0]



$u \ll 1 \Rightarrow \omega \ll \omega_0 \rightarrow A \rightarrow 0 \cdot Y \rightarrow 0$

$x \rightarrow x_e$ Le sismographe n'enregistre aucune oscillation.

$u \gg 1 \rightarrow A \approx a$ le sismographe enregistre les oscillations du sol.

(3) d'où $\omega_0 \ll \omega_{\text{min}} < \omega_{\text{max}}$

