Correction TD stabilité d'un équilibre.

Ex1 . $\overrightarrow{F(x)}$ $\vec{u_x}$

$$\overrightarrow{F(x)} = F(x)\,\vec{e_x} \qquad E_p(x) = \frac{\omega^2}{2}\left(x^2 + \frac{a^4}{x^2}\right) \vec{e_x}.$$

1)

$$\left[\frac{a^4}{x^2}\right] = [x^2] = L \Rightarrow [a^4] = [x^4] \Rightarrow [a] = [x] = L.$$

$$[E_p] = [W] = [F] \cdot L = M \cdot LT^{-2} \cdot L = ML^2T^{-2} \quad \text{donc} \quad [\omega^2] = \frac{[E_p]}{L^2} = MT^{-2}.$$

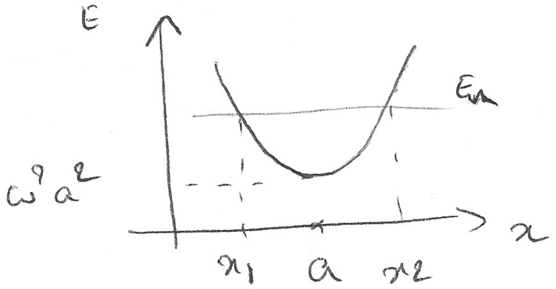
2) $E_p(x)$ tjs > 0

$x \to \infty \quad E_p \to \infty$

$x \to 0 \quad E_p \to \infty.$

$$\frac{dE_p}{dx} = \frac{\omega^2}{2}\left[2x - \frac{2a^4}{x^3}\right] = 0 \Rightarrow x^4 = a^4 \Rightarrow x = a.$$

$$E_p(a) = \frac{\omega^2}{2}\left[a^2 + a^2\right] = \omega^2 a^2$$



$E_m = cste = E_c + E_p \Rightarrow E_c = E_m - E_p > 0$

Les valeurs permises par x vérifient $x_1 < x < x_2$.

$$\delta W = \vec{F} \cdot d\vec{M} = F(x)\vec{u_x} \cdot dx\,\vec{u_x} = F(x)\,dx = -dE_p \Rightarrow \boxed{F(x) = -\frac{dE_p}{dx}.}$$

$$F(x) = -\omega^2\left[x - \frac{a^4}{x^3}\right] = \boxed{-\omega^2\left(\frac{x^4 - a^4}{x^3}\right) = F(x).}$$

3°] x_E est position d'éq $\Rightarrow \sum \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow$ proj$/\vec{u_x} \Rightarrow F(x_E) = 0.$

or $-\frac{dE_p}{dx}(x_E) = 0 \Rightarrow x_E = a.$

Stabilité si $\frac{d^2E_p}{dx^2}(x = x_E) > 0.$ or $\frac{d^2E_p}{dx^2} = \omega^2\left[1 + 3\frac{a^4}{x^4}\right]$

et stable $\boxed{\frac{d^2E_p}{dx^2}(x_E = a) = \omega^2\left[1 + 3\right] = 4\omega^2 > 0}$

4°] $x > a$ $\quad F(x) < 0$ $\quad \overrightarrow{F(x)}$ a x F

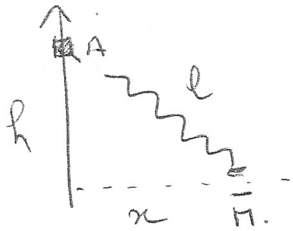
$x < a$ $\quad F(x) > 0$ $\quad \overrightarrow{F(x)}$ a stable

5°] $m\ddot{x} = F(x) = -\frac{dE_p(x)}{dx}. \Leftarrow$ Proj PFD suivant $\vec{e_x}$ Au voisinage de $x = a$:

$$\frac{dE_p}{dx} = \frac{dE_p}{dx}(x_e) + (x - x_e)\frac{d^2E_p}{dx^2}(x_e)$$

$$\Rightarrow m\ddot{X} + (X - a) \cdot 4\omega^2 = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{X(t) - a) = A\cos 2\omega t + \varphi.}$$



A fixe M peut coulisser sans frottement :

$E_p(\ell) = \frac{1}{2} k (\ell - \ell_0)^2$ avec $\ell^2 = x^2 + h^2$

$$\boxed{E_p(x) = \frac{1}{2} k \left[(x^2+h^2)^{1/2} - \ell_0\right]^2}$$

A l'éq. $\vec{P} + \vec{T} + \vec{R} = 0$.

en proj° / $\vec{e_x}$ $T_x = 0$ or $\delta W_{\vec{T}} = T_x \cdot dx = -dE_p$. donc

$T_x = 0$ équivaut à $\frac{dE_p}{dx} = 0$ en $x = x_E$.

*) Recherche des positions d'éq.

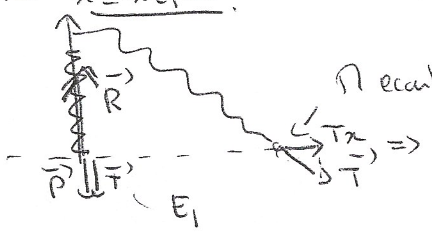
$$\frac{dE_p}{dx} = k \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2x}{\sqrt{x^2+h^2}} \left[(x^2+h^2)^{1/2} - \ell_0\right] = \frac{kx}{\sqrt{x^2+h^2}} \left[\sqrt{x^2+h^2} - \ell_0\right] = 0$$

pour et $\boxed{x_{E_1} = 0 \qquad x_{E_2} = \sqrt{\ell_0^2 - h^2} \quad \text{si } h < \ell_0.}$

**] Prévision qualitative de la stabilité de l'éq.

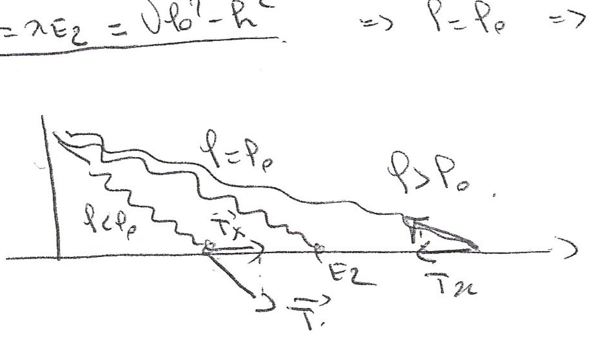
Pour $x = x_{E_1} = 0$.

$h < \ell_0$



M écarté légèrement de E_1. ($\ell > h$ et $\ell < \ell_0$) => M s'écarte encore + de E_1 => éq. instable.

$x = x_{E_2} = \sqrt{\ell_0^2 - h^2}$ => $\ell = \ell_0$ => $\vec{T} = \vec{0}$



M revient vers E_2 => E_2 stable.

***] Prévision quantitative de l'éq par le signe de $\frac{d^2E_p}{dx^2}(x_E)$.

$$\frac{dE_p}{dx} = \frac{kx}{\sqrt{x^2+h^2}}\left[\sqrt{x^2+h^2} - \ell_0\right] = kx\left[1 - \frac{\ell_0}{\sqrt{x^2+h^2}}\right] = kx\left[1 - \ell_0(x^2+h^2)\right.$$

$$\frac{d^2E_p}{dx^2} = k\left[1-\frac{\ell_0}{\sqrt{x^2+h^2}}\right] + kx\cdot\frac{\ell_0}{2}\cdot\frac{2x}{(x^2+h^2)^{3/2}} = k\left[1-\frac{\ell_0}{\sqrt{x^2+h^2}}\right] + \frac{k\ell_0 x^2}{(x^2+h^2)^{3/2}}$$

$x = x_{E1}$

$$\frac{d^2E_p}{dx^2}\left(x_{E1}=0\right] = k\underbrace{\left(1-\frac{\ell_0}{h}\right)}_{<0\ (\text{car } h<\ell_0)} \Rightarrow \text{éq. instable.}$$

$x = x_{E2}$

$$\frac{d^2E_p}{dx^2}\left(x_{E2}\right) = 0 + k\ell_0\frac{\left(\ell_0^2-h^2\right)}{\left(\ell_0^2\right)^{3/2}} = k\left(1-\frac{h^2}{\ell_0^2}\right) > 0.$$

Étude au voisinage de x_{E2} :

$$E_m = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + E_p(x) = \text{cste} \Rightarrow \frac{dE_m}{dt} = 0$$

$$m\dot{x}\ddot{x} + \dot{x}\frac{dE_p}{dx} = 0.$$

$$m\ddot{x} + \frac{dE_p}{dx} = 0 \quad \text{avec} \quad \frac{dE_p}{dx} = \underbrace{\frac{dE_p}{dx}(x_e)}_{=0} + \frac{d^2E_p}{dx^2}(x_e)(x-$$

$$m\ddot{x} + \frac{d^2E_p}{dx^2}(x_e)(x-x_{E2}) = 0$$

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}\left(1-\frac{h^2}{\ell_0^2}\right)(x-x_{E2}) = 0 \Rightarrow x = x_{E2} + A\cos(\omega t+\varphi)$$

$$\text{avec } \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}\left(1-\frac{h^2}{\ell_0^2}\right)}.$$