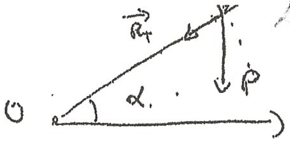


1ère phase : $\vec{a} = a\,\vec{e_x}$ avec $a = 0{,}25\ m\,s^{-2}$.

$\vec{OM} = x(t)\,\vec{e_x} \Rightarrow a = \ddot{x}$

$\dot{x}(t) = a.t$. $x(t) = \frac{at^2}{2}$ en prenant $\dot{x}(0) = 0$
$x(0) = 0$.

La première phase dure un temps t_1 et $\dot{x}(t_1) = \boxed{v_1 = a t_1}$
Le skieur a parcouru $d_1 = \frac{a t_1^2}{2} = \frac{a}{2}\frac{v_1^2}{a^2} = \boxed{\frac{v_1^2}{2a} = d_1}$
et se situe en M_1

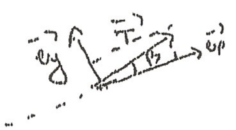
La deuxième phase dure un temps t_2 et $\dot{x}(t) = v_1$ d'où $\boxed{x(t) = v_1 t}$ en prenant comme nouvelle origine (des temps et des abscisses le point M_1).

avec $\boxed{t_2 = \frac{d - d_1}{v_1}}$.

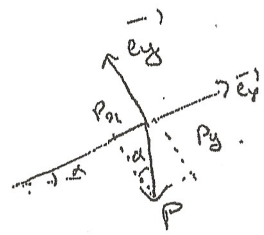
AN $t_1 = \frac{v_1}{a_1} = \frac{2}{0{,}25} = 8\,s$ $\quad d_1 = \frac{4}{0{,}5} = 8\,m$

$t_2 = \frac{492}{2} = 246\,s = 4{,}1\,mn$.

Question 2.



$$\begin{cases} \vec{T} = T\cos\beta\,\vec{e_x} + T\sin\beta\,\vec{e_y} \\ \vec{R_T} = -R_T\,\vec{e_x} \\ \vec{R_N} = R_N\,\vec{e_y} \\ \vec{P} = -mg\sin\alpha\,\vec{e_x} - mg\cos\alpha\,\vec{e_y} \end{cases}$$



$\vec{P} = -mg\sin\alpha\,\vec{e_x} - mg\cos\alpha\,\vec{e_y}$

En mV $\|\vec{R_T}\| = \mu\,\|\vec{R_N}\|$.

$\vec{e_x}$: $-mg\sin\alpha + T\cos\beta - \mu . R_N = ma$. (1)

$\vec{e_y}$: $-mg\cos\alpha + T\sin\beta + R_N = 0$ (2).

eq (2) $\Rightarrow$ $R_N = mg\cos\alpha - T\sin\beta$

eq (1) $\Rightarrow$ $-mg\sin\alpha + T\cos\beta - \mu(mg\cos\alpha - T\sin\beta) = ma$.

$T[\cos\beta + \mu\sin\beta] = m[a + g\sin\alpha + \mu g\cos\alpha]$.

$\Rightarrow \boxed{T_1 = \frac{m[a + g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)]}{\cos\beta + \mu\sin\beta}}$.

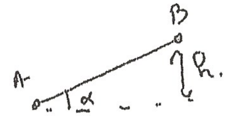
2ème phase uniforme. T_2 se déduit de T_1 en faisant $a = 0$.

$$\boxed{T_2 = \frac{mg(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)}{\cos\beta + \mu\sin\beta}}$$

AN $T_1 = 80\,\frac{[0{,}25 + 9{,}80(\sin 20° + 0{,}05\cos 20°)]}{\cos 30 + 0{,}05\sin 30}$ $= \boxed{366\,N = T_1}$

$\boxed{T_2 = 343\,N}$.

Question 4



$L = AB$

$W_{A\to B}(\vec{P}) = -mgh$ = et $\sin\alpha = \frac{h}{L}$
$= -mgL\sin\alpha$

$W_{A\to B}(\vec{R_N}) = 0$

$W_{A\to B}(\vec{R_T}) = -R_T . L$.

$W_{A\to B}(\vec{T}) = +T . L\cos\beta$.

Can

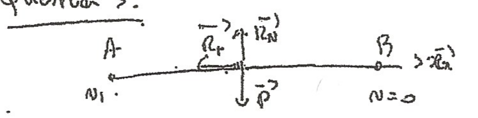
Lors de la phase uniforme.

$E_c(B)-E_c(A)=0=-mgL\sin\alpha-R_T\cdot L+T\cdot L\cos\beta$

$=(\underbrace{-mg\sin\alpha-R_T+T\cos\beta}_{=0})\cdot L$

$=0$ d'après la projection du PFD suivant $\vec{e_x}$.

Question 5.



TEC $E_c(B)-E_c(A)=W_{A\to B}(\vec{R_T})$

$-\frac{1}{2}mv_1^2=-d\cdot R_T=-d\cdot\mu\cdot R_N$

$=-d\mu\cdot mg$

$\Rightarrow d=\frac{\cancel{m}v_1^2}{2\mu\cancel{m}g}\rightarrow\boxed{d=\frac{v_1^2}{2\mu g}}$

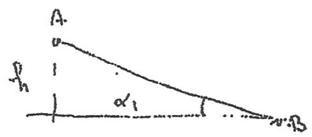
TEM $E_m(B)-E_m(A)=W_{A\to B}(\vec{R_T})$.

AN $d=\frac{4}{2\cdot 0{,}05\cdot 9{,}8}=4m$.

et $x(t)=\frac{1}{2}at^2+v_1t$ et $v(t)=at+v_1$ avec $a=-\frac{R_T}{m}=-\mu g$.

d'où $t_1=\frac{0-v_1}{-\mu g}=\frac{v_1}{\mu g}=\frac{2}{0{,}05\cdot 9{,}8}=4s$.

Question 6.



$AB=L$

$\alpha=45°$

TEC : $E_c(B)-E_c(A)=\sum W_{A\to B}^{\vec{F}}$

d'où $\frac{1}{2}mv_B^2=-R_T\cdot L+mgh$

$=-\mu mg\cos\alpha L+mgL\sin\alpha$.

$\Rightarrow v_B=(2[g\sin\alpha-\mu g\cos\alpha]\cdot L)^{1/2}=(2gL[\sin\alpha-\mu\cos\alpha])^{1/2}$.

AN $v_B=\sqrt{2\cdot 20\cdot 9{,}8\,[\sin 45°-0{,}05\cos 45°]}=\sqrt{\sqrt{2}\cdot 20\cdot 9{,}8\,[1-0{,}05]}\approx 16{,}2\,ms^{-1}$

18/13

Correction DM

Chasse au plomb.

Q1 : Théorème du centre d'inertie G.

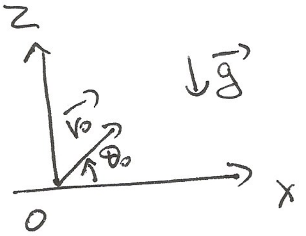
$$m\cdot\vec a_{G/R} = \sum \vec F_{ext} = m\vec g - \frac{1}{2}\rho_a S\, C_d\, v\,\vec v$$

$$\boxed{\frac{d\vec v}{dt} + \frac{\rho_a S C_d v \vec v}{2m} = \vec g}$$

1er Modèle : force de frottement négligée

Q2 : La force de frottement initiale est négligeable devant la force de pesanteur $\frac{\rho_a S C_d v_0^2}{2m} < g \Rightarrow \boxed{v_0 \ll \sqrt{\frac{2mg}{\rho_a \pi R^2 C_d}}} = v_\infty$.

Q3 :



$$\begin{cases} \vec{OM} = x\vec i + z\vec k \\ \vec v = \dot x\vec i + \dot z\vec k \\ \vec a = \ddot x\vec i + \ddot z\vec k \end{cases}$$

$m\vec a = m\vec g$

proj/$\vec i$ → $\begin{cases} m\ddot x = 0 \\ m\ddot z = -mg \end{cases}$ proj/$\vec k$

à $t=0$ $\begin{cases} \dot x(0) = v_0\cos\theta_0 \\ \dot z(0) = v_0\sin\theta_0 \end{cases}$ $x(0) = y(0) = 0$

Q4

$\dot x(t) = v_0\cos\theta_0$

$\dot z(t) = -gt + v_0\sin\theta_0$

→ $\boxed{\begin{aligned} x(t) &= v_0\cos\theta_0\, t \\ z(t) &= -g\frac{t^2}{2} + v_0\sin\theta_0\, t \end{aligned}}$

Q5 La trajectoire est une parabole d'équation.

$$\boxed{z(x) = -\frac{g}{2v_0^2\cos^2\theta_0}\cdot x^2 + (tg\,\theta_0)\cdot x}$$

Q6 Portée du tir :

$z = 0 \rightarrow x_m = \frac{2v_0^2\cos^2\theta_0}{g}\cdot tg\,\theta_0 = \frac{2v_0^2}{g}\cos\theta_0\sin\theta_0 \rightarrow \boxed{x_m = \frac{v_0^2}{g}\sin(2\theta_0)}$

Hauteur maximale → $\dot z = 0$ → $t_1 = \frac{v_0\sin\theta_0}{g}$.

$$\boxed{H_m = z(t_1) = \frac{v_0^2\sin^2\theta_0}{2g}}$$

Q7 Portée maximale $(x_m)_{max} = \frac{v_0^2}{g}$ pour $\sin 2\theta_0 = 1 \rightarrow 2\theta_0 = \frac{\pi}{2} \rightarrow \theta_0 = \frac{\pi}{4}$

Q8. $\theta_0 = \frac{\pi}{4}$; $v_0 = 380\ m s^{-1}$ $m = \rho \cdot \frac{4}{3}\pi R^3$

$$v_\infty = \sqrt{\frac{2mg}{\rho_a \cdot \pi R^2 C_D}} \quad \text{et} \quad m = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho \quad \Rightarrow \quad v_\infty = \sqrt{\frac{8 g \rho R}{3 \rho_a \cdot C_D}}$$

AN $\rho = 11350\ kg\,m^{-3}$ $\rho_a = 1{,}23\ kg\,m^{-3}$ $C_D = 0{,}44$.

$R_1 = 2mm$ $R_k = 2 - (k-1) \cdot 0{,}125$. $m = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho$.

n°i	1	5	10
Rayon R (mm)	2,0	1,5	0,875
Masse m (g)	0,38	0,16	0,031
Portée Xm (km)	15	15	15
Hauteur Hm (km)	3,7	3,7	3,7
V_∞ ($m s^{-1}$)	33	29	22

Q9 On a pour un diamètre de plomb $2R = 3mm$. $\rightarrow (X_m)_{max} = 15km$ (Modèle gravitaire)

ds le document 1 $(X_m)_{max} = 3 \cdot 100 = 300m \ll 15km$.

$V_\infty = 29 ms^{-1} \simeq \frac{V_0}{10}$; la condition $V_0 \ll V_\infty$ n'est pas vérifiée.

Deuxième modèle : Trajectoire de Tartaglia.

Q10] On a montré ds la question Q2 que si $V_0 \ll V_\infty$ alors $F_D \ll mg$.

or ds la question 9, on a montré que $V_0 \geqslant 10 V_\infty$ donc $mg \ll F_D$.

où F_D désigne la force de Trainée.

Q11] PFD ds R galiléen $m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = \underbrace{m\vec{g}}_{\text{négligée}} + \vec{F_D}$.

d'où $m\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{1}{2}\rho_a \cdot \pi R^2 C_D \cdot v \cdot \vec{v}$.

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{1}{2}\frac{\rho_a}{mg}\pi R^2 C_D \cdot v \cdot g \cdot \vec{v} \quad \text{avec} \quad V_\infty^2 = \frac{2mg}{\rho_a \cdot \pi R^2 C_D}$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{g}{V_\infty^2} v \cdot \vec{v} \quad \text{avec} \quad v = \frac{dx'}{dt} \quad \text{et} \quad \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{v}}{dx'} \cdot \frac{dx'}{dt}$$

d'où $\boxed{\frac{d\vec{v}}{dx'} = \frac{-g}{V_\infty^2}\vec{v}}$ On pose $D = \frac{V_\infty^2}{g}$ et $[D] = \frac{L^2T^{-2}}{LT^{-2}} = L$.

Q13] On projette la relation sur X' et on obtient :

$\vec{V} = \text{cste}\, e^{-\frac{x'}{D}}$ et à $t=0$ $\vec{V} = \vec{V_0}$ $\Rightarrow$ $\boxed{\vec{V} = \vec{V_0}\, e^{-\frac{x'}{D}}}$

Au bout de 10D, $\vec{V} \to 0$: lorsque $x = D$, $\vec{V}$ est divisée par $e \simeq 2,7$.

Q14] $v(d) = 10 v_\infty = v_0 e^{-\frac{d}{D}}$ $\Rightarrow$ $e^{-\frac{d}{D}} = \frac{10 v_\infty}{v_0}$ $\Rightarrow$ $\boxed{d = D \ln \frac{v_0}{10 v_\infty}}$

$\boxed{D = \frac{v_\infty^2}{g}}$

$\begin{cases} v_u = v_0 e^{-\frac{x_1}{D}} \text{ avec } x_1 = 40\,m. \\ E_c = \frac{1}{2} m v_u^2 . \end{cases}$

n°	1	5	10.
		86	50
D(m)	110	13	17
v_0/v_∞	11	23	27
d(m)	15,5		
v_u (m/s)	270	240	170
Ec (J)	13,5	4,6.	0,45

Q15] = Distance maximale à laquelle on peut envoyer les plombs dans la direction X.

Q16] $\frac{Ec_5}{Ec_1} = 0,34 \simeq \frac{1}{3}$ → 3×2 plombs $= 6$ plombs n°5.

$\frac{Ec_{10}}{Ec_1} = 0,033 \simeq \frac{1}{30}$ → 60 plombs n°10.

Q17 Dans le document, on parle d'une portée utile de 35 à 40 m.
Dans le modèle, d varie de 15 à 27 m. → cohérent.

Bille en fer doux ⇒ ρ ↘ ⇒ m, v_∞, D et v_u ↘. Augmentation de R compense ~~cette~~ cet effet.

Si les plombs s'agglutinent, m et R augmentent ⇒ d ↑ danger !

Troisième phase.

Q18) Mvt de chute en tenant compte de la résistance de l'air.

Q19) Quand la vitesse limite est atteinte $\Sigma\vec{F} = \vec{0}$ puisque $\vec{v} = cte$

donc $\frac{d\vec{v}}{dt} = 0$ d'où $m\vec{g} + \vec{Fd} = 0$

$\vec{k}$ étant orienté vers le haut $-mg\vec{k} + \frac{1}{2}\rho a . S\, Cd\, v_{li}^2 \vec{k} = 0$

et $\vec{v}$ vers le bas.

donc $\vec{Fd}$ vers le haut $\rightarrow$ $v_{lim} = \sqrt{\frac{2mg}{\rho a \pi R^2 Cd}}$ et $\boxed{\vec{v}_{li} = \sqrt{\frac{2mg}{\rho a \pi R^2 Cd}}\left(-\vec{k}\right)}$

La vitesse est limitée par la force aérodynamique $\Rightarrow$ mvt aérodynamique

Q20) Phase intermédiaire :

On suppose que v a suffisamment diminuée devant v_∞ $\Rightarrow$ la 1ère modélisation s'applique.

Q21) $\theta_0 = 16°$

	Formule donnée		
plomb n°1	Xm = 264 m	Xm = 400 m	A partir de la formule doc 1. diamètre × 100 du plomb
plomb n°5	Xm = 217 m	Xm = 300	
plomb n°10	Xm = 139 m	Xm = 175 m	

Rq 1 le doc 1 donne des valeurs supérieures mais la formule est qualifiée de grossière et donne par des raisons de sécurité, des valeurs supérieures.

Rq 2 Le calcul théorique est fait pour $\theta = 16°$ qui n'est pas forcément celui de la portée maximale.

22+23)

n	$\log\left(\frac{v_0}{v_\infty}\right)^2$	θ_{max}
1	2	18°
5	2,2	17°
10	2,5	16°.

$z = 0 \rightarrow$ On lit.

Xm = 345 m pour le plomb n°1

Xm = 265 m pour le plomb n°5

Xm = 170 m pour le plomb n°10.