Devoir surveillé n° 4
CORRIGÉ

Exercice 1.

1. (a) On a, si $\alpha \neq 1$: $I_{\alpha,0}(x) = \displaystyle\int_e^x \frac{1}{t^\alpha}dt = \left[\frac{t^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]_e^x = \frac{x^{1-\alpha}-e^{1-\alpha}}{1-\alpha}$.
   Et si $\alpha = 1$: $I_{1,0}(x) = \displaystyle\int_e^x \frac{1}{t}dt = [\ln t]_e^x = \ln(x) - 1$.

   (b) On a : $I_{1,0}(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
   De plus, si $\alpha \neq 1$, alors $P(\alpha,0)$ est vraie si et seulement si $x^{1-\alpha}$ admet une limite finie quand $x \to +\infty$, c'est-à-dire lorsque $1-\alpha < 0$, c'est-à-dire $\alpha > 1$.
   Donc $P(\alpha,0)$ est vraie si et seulement si $\alpha > 1$.

2. (a) On a : $\displaystyle\int \frac{\ln t}{t}dt = \int u'(t)\times u(t)dt$ en posant $u(t) = \ln t$, donc :

$$\int \frac{\ln t}{t} = \frac{u(t)^2}{2} + c = \frac{(\ln t)^2}{2} + c,\ c \in \mathbb{R}.$$

   Donc :

$$\forall x > 1, \quad I_{1,-1}(x) = \int_e^x \frac{\ln t}{t}dt = \left[\frac{(\ln t)^2}{2}\right]_e^x = \frac{(\ln x)^2 - 1}{2}.$$

   (b) On a :

$$\begin{aligned} I_{\alpha,-1}(x) = \int_e^x \frac{\ln t}{t^\alpha}dt &= \left[\ln(t)\times\frac{t^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]_e^x - \int_e^x \frac{1}{t}\times\frac{t^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}dt \\ &= \frac{x^{1-\alpha}\ln(x) - e^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha}\int_e^x t^{-\alpha}dt \\ &= \frac{x^{1-\alpha}\ln(x) - e^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{x^{1-\alpha}-e^{1-\alpha}}{(1-\alpha)^2}. \end{aligned}$$

   (c) D'après (a), $I_{1,-1}(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
   Si $\alpha > 1$, alors $x^{1-\alpha} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et, par croissances comparées, $x^{1-\alpha}\ln(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ également, donc, d'après (b), $P(\alpha,-1)$ est vraie.
   Si $\alpha < 1$, alors, à nouveau par croissances comparées, $I_{\alpha,-1}(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
   Donc $P(\alpha,-1)$ est vraie si et seulement si $\alpha > 1$.

3. (a) Posons $u = \ln t$, alors $\dfrac{du}{dt} = \dfrac{1}{t}$, donc $dt = tdu = e^u du$.
   On a alors : $I_{1,\beta}(x) = \displaystyle\int_{t=e}^{t=x} \frac{1}{t(\ln t)^\beta}dt = \int_{u=1}^{u=\ln x} \frac{1}{e^u u^\beta}e^u du = \int_1^{\ln x} u^{-\beta}du$.

   (b) Si $\beta \neq 1$, alors $I_{1,\beta}(x) = \dfrac{(\ln x)^{1-\beta} - 1}{1-\beta} = I_{\beta,0}(\ln(x)) - \dfrac{1-e^{1-\beta}}{1-\beta}$.

   (c) Si $\beta = 1$, alors : $I_{1,1}(x) = \displaystyle\int_1^{\ln x} \frac{du}{u} = [\ln|u|]_1^{\ln x} = \ln|\ln(x)|$. Donc $I_{1,1}(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
   Donc, d'après (b) et 1., $P(1,\beta)$ est vraie si et seulement si $\beta > 1$.

Exercice 2.

1. Soit $(a,b)\in(\mathbb{N}^*)^2$. On a : $(a,b)\in f^{-1}(\{d\}\times\mathbb{N}^*)\Leftrightarrow a\wedge b=d$, et, par définition du PGCD, $a\wedge b=d$ si et seulement s'il existe $a',b'\in\mathbb{N}^*$ premiers entre eux tels que $a=da'$ et $b=db'$.
2. Soit $(a,b)\in(\mathbb{N}^*)^2$. On a :
$$(a,b)\in f^{-1}(\{(15,180)\})\Leftrightarrow(a\wedge b=15 \text{ et } a\vee b=180).$$
Or, d'après 1 : $(a\wedge b=15)$ si et seulement s'il existe $a',b'\in\mathbb{N}^*$ premiers entre eux tels que $a=15a'$ et $b=15b'$. Alors :
$$\begin{aligned}(a,b)\in f^{-1}(\{(15,180)\}) &\Leftrightarrow (a'\wedge b'=1 \text{ et } 15a'b'=180)\\ &\Leftrightarrow (a'\wedge b'=1 \text{ et } a'\times b'=12)\\ &\Leftrightarrow (a',b')=(1,12),\ (3,4),\ (4,3),\ (12,1)\\ &\Leftrightarrow (a,b)=(15,180),\ (45,60),\ (60,45),\ (180,15).\end{aligned}$$
Finalement : $f^{-1}(\{(15,180)\})=\{(15,180),\ (45,60),\ (60,45),\ (180,15)\}$.
3. D'après la question précédente, $(15,180)$ a 4 antécédents par f, donc f n'est pas injective.
Par ailleurs : $\forall(a,b)\in(\mathbb{N}^*)^2,\ a\wedge b\leq a\vee b$, donc, par exemple, $(3,2)$ n'a pas d'antécédent par f. Donc f n'est pas surjective.
4. (a) Supposons que (d,m) admette un antécédent par f dans A, notons (a,b) un tel antécédent. Alors, avec les notations de la question 1 : $da'b'=m$, donc d divise m.

   (b) Soit $(a,b)\in A$. Avec les notations de la question 1 :
$$\begin{aligned}(a,b)\in f^{-1}(\{(d,m)\}) &\Leftrightarrow (a\wedge b=d \text{ et } a\vee b=m)\\ &\Leftrightarrow (a'\wedge b'=1 \text{ et } da'b'=m)\\ &\Leftrightarrow (a'\wedge b'=1 \text{ et } a'b'=q).\end{aligned}$$
Si q est premier, alors :
$$(a'\wedge b'=1 \text{ et } a'b'=q)\Leftrightarrow(a',b')=(1,q)\Leftrightarrow(a,b)=(d,m),$$
c'est-à-dire que (d,m) est le seul antécédent de (d,m) par f dans A.
Si q n'est pas premier, notons $q=q_1q_2$ avec $2\leq q_1\leq q_2\leq q-1$, alors :
$$(a'\wedge b'=1 \text{ et } a'b'=q)\Leftarrow((a',b')=(1,q) \text{ ou } (q_1,q_2))\Leftarrow((a,b)=(d,m) \text{ ou } (dq_1,dq_2)),$$
c'est-à-dire que (d,m) et (dq_1,dq_2) sont deux antécédents distincts de (d,m) par f.
Donc (d,m) admet un seul antécédent par f dans A si et seulement si q est premier.
5. D'après la question 4, en notant $\mathcal{P}$ l'ensemble des nombres premiers :
$A'=B=\left\{(d,m)\in(\mathbb{N}^*)^2\mid\exists q\in\mathcal{P},\ m=qd\right\}$ conviennent.
Entre ces ensembles, l'application f est l'application identité.

Exercice 3.

1. Comme f est solution de (E), f est nécessairement dérivable.
   De plus, on a directement :
   $$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f'(x) = \frac{1}{2x^2} f\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{2}. \qquad (F)$$
   Comme $x \mapsto \dfrac{1}{2x^2}$ est usuellement dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et que f est dérivable, leur produit l'est également, donc f' est dérivable. Donc f est deux fois dérivable.
2. On dérive l'égalité (F) : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f''(x) = -\dfrac{1}{x^3} f\left(\dfrac{1}{x}\right) - \dfrac{1}{2x^4} f'\left(\dfrac{1}{x}\right)$.
   Or, toujours d'après (F) : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f'\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{x^2}{2} f(x) - \dfrac{1}{2}$. Donc :
   $$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f''(x) = -\frac{1}{x}(2f'(x)+1) - \frac{1}{4x^2} f(x) + \frac{1}{4x^4},$$
   c'est-à-dire : $4x^2 f'' + 8xf' + f = \dfrac{1}{x^2} - 4x$.
3. On a : $\forall t \in \mathbb{R},\ g'(t) = e^t f'(e^t) = xf'(x)$, puis $g''(x) = e^t f'(e^t) + e^{2t} f''(e^t) = xf'(x) + x^2 f''(x)$.
   Donc :
   $$4g'' + 4g' + g = 4x^2 f'' + 4xf' + 4xf' + f \underset{(E')}{=} \frac{1}{x^2} - 4x = e^{-2t} - 4e^t.$$
4. L'équation (E'') est une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants.
   Le polynôme caractéristique associé à (E''), $P(r) = 4r^2 + 4r + 1 = (2r+1)^2$, a pour racine double $r = -\dfrac{1}{2}$.
   L'équation homogène associée à (E'') a donc pour solutions les $g_h : t \mapsto (\lambda t + \mu)e^{-\frac{t}{2}}$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
   De plus, une solution particulière de (E'') est $g_p : t \mapsto \dfrac{1}{P(-2)} e^{-2t} - \dfrac{4}{P(1)} e^t = \dfrac{1}{9} e^{-2t} - \dfrac{4}{9} e^t$.
   Donc :
   $$S'' = \left\{ g : t \mapsto (\lambda t + \mu)e^{-\frac{t}{2}} + \frac{1}{9} e^{-2t} - \frac{4}{9} e^t \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}.$$
5. D'après le résultat précédent, et comme $t = \ln(x)$, on a :
   $$C = \left\{ f : x \mapsto \frac{\lambda \ln(x) + \mu}{\sqrt{x}} + \frac{1}{9x^2} - \frac{4x}{9} \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}.$$
6. Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, soit $f : x \mapsto \dfrac{\lambda \ln(x) + \mu}{\sqrt{x}} + \dfrac{1}{9x^2} - \dfrac{4x}{9}$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$.
   Alors :
   $$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f\left(\frac{1}{x}\right) = (-\lambda \ln(x) + \mu)\sqrt{x} + \frac{x^2}{9} - \frac{4}{9x},$$
   et :
   $$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f'(x) = \frac{\lambda}{x\sqrt{x}} - \frac{1}{2}\frac{\lambda \ln(x) + \mu}{x^{\frac{3}{2}}} - \frac{2}{9x^3} - \frac{4}{9},$$
   donc : $(E) \Leftrightarrow \mu\sqrt{x} = 2\lambda\sqrt{x} - \mu\sqrt{x} \Leftrightarrow \lambda = \mu$. Finalement, par analyse-synthèse :
   $$S = \left\{ f : x \mapsto \lambda \frac{\ln(x) + 1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{9x^2} - \frac{4x}{9} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

Problème.

I. 1. L'équation est définie sur le domaine de définition de la fonction $\ln$, donc $I = \mathbb{R}_+^*$.

2. Soit t dans I et (a, b, c) dans $\mathbb{R}^3$, on a :

$$\frac{a}{t} + \frac{bt + c}{t^2 + 1} = \frac{(a + b)t^2 + ct + a}{t(t^2 + 1)},$$

donc, par identification, l'égalité voulue est obtenue si et seulement si $a + b = 0$, $c = 0$ et $a = 1$, c'est-à-dire $(a, b, c) = (1, -1, 0)$.

3. D'après la question précédente : $f : t \mapsto \frac{1}{t} - \frac{t}{t^2 + 1}$, de primitive $F : t \mapsto \ln(t) - \frac{1}{2}\ln(t^2 + 1)$.

4. Une primitive G est donnée par :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*,\ G(t) = \int_1^t x \ln x dx = \left[\frac{x^2}{2}\ln x\right]_1^t - \int_1^t \frac{x}{2} dx = \frac{t^2}{2}\ln(t) - \frac{t^2}{4} + \frac{1}{4}.$$

5. Une primitive H est donnée par :

$$\begin{aligned}
\forall t \in \mathbb{R}_+^*,\ H(t) &= \int_1^t (1 - x^2) \ln x dx \\
&= \left[\left(x - \frac{x^3}{3}\right)\ln x\right]_1^t - \int_1^t \left(1 - \frac{x^2}{3}\right) dx \\
&= \left(t - \frac{t^3}{3}\right)\ln(t) - t + \frac{t^3}{9} + \frac{8}{9}.
\end{aligned}$$

II. 1. La fonction z est dérivable et :
$\forall t \in \mathbb{R}_+^*$, $Z(t) = z'(t) = \frac{y'(t)}{t} - \frac{y(t)}{t^2}$, puis $Z'(t) = \frac{y''(t)}{t} - 2\frac{y'(t)}{t^2} + 2\frac{y(t)}{t^3}$, d'où :

$$\begin{aligned}
tZ' + \frac{2}{t^2 + 1}Z = 0 &\Leftrightarrow y'' - 2\frac{y'}{t} + 2\frac{y}{t^2} + \frac{2}{t(t^2 + 1)}y' - \frac{2}{t^2(t^2 + 1)}y = 0 \\
&\Leftrightarrow y'' - \frac{2t}{t^2 + 1}y' + \frac{2}{t^2 + 1}y = 0.
\end{aligned}$$

2. Cette équation s'écrit $Z' + \frac{2}{t(t^2 + 1)}Z = 0$, équation d'ordre 1 de coefficient $a : t \mapsto \frac{2}{t(t^2 + 1)}$, de primitive $A : t \mapsto 2\ln t - \ln(t^2 + 1)$. Les solutions sont donc :

$$\left\{Z : t \mapsto \lambda e^{-\left(2\ln t - \ln(t^2+1)\right)} = \lambda\frac{t^2 + 1}{t^2} = \lambda\left(1 + \frac{1}{t^2}\right) \mid \lambda \in \mathbb{R}\right\},$$

d'où

$$\left\{z : t \mapsto \lambda\left(t - \frac{1}{t}\right) + \mu \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\right\},$$

d'où

$$\left\{y_h : t \mapsto \lambda\left(t^2 - 1\right) + \mu t \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$

III. 1. On a $y_p' = \lambda' t + \lambda + \mu'(t^2 - 1) + 2t\mu = \lambda + 2t\mu$, puis $y_p'' = \lambda' + 2\mu + 2t\mu'$.

2. On a :

$$\begin{aligned} y_p'' - \frac{2t}{t^2+1} y_p' + \frac{2}{t^2+1} y_p &= \lambda' + 2\mu + 2t\mu' - \frac{2t}{t^2+1}(\lambda + 2t\mu) \\ &\quad + \frac{2}{t^2+1}\big(\lambda t + \mu(t^2-1)\big) \\ &= \lambda' + 2t\mu' + \left(2 - \frac{4t^2}{t^2+1} + \frac{2t^2-2}{t^2+1}\right)\mu \\ &= \lambda' + 2t\mu', \end{aligned}$$

d'où l'équivalence voulue.

3. Les fonctions λ' et μ' sont solutions du système linéaire :

$$\left\{ \begin{array}{rcrcl} \lambda' & + & 2t\mu' & = & (t^2+1)\ln t \\ t\lambda' & + & (t^2-1)\mu' & = & 0 \end{array} \right. ,$$

c'est-à-dire par $L_2 \leftarrow L_2 - tL_1$:

$$\left\{ \begin{array}{rcrcl} \lambda' & + & 2t\mu' & = & (t^2+1)\ln t \\ & & \mu' & = & t\ln t \end{array} \right. ,$$

c'est-à-dire par $L_1 \leftarrow L_1 - 2tL_2$:

$$\left\{ \begin{array}{rrcl} \lambda' & & = & (1-t^2)\ln t \\ & \mu' & = & t\ln t \end{array} \right. ,$$

donc $\lambda = H$ et $\mu = G$ conviennent. Donc une solution particulière de (E) est :

$$y_p : t \mapsto \left(t^2 - \frac{t^4}{3}\right)\ln t - t^2 + \frac{t^4}{9} + \left(\frac{t^2}{2}\ln t - \frac{t^2}{4}\right)(t^2-1),$$

c'est-à-dire :

$$y_p : t \mapsto \frac{t^4}{6}\ln t + \frac{t^2}{2}\ln t - \frac{5}{36}t^4 - \frac{3}{4}t^2.$$

4. On rassemble les solutions homogènes et la solution particulière trouvées pour obtenir l'ensemble des solutions de (E) :

$$\left\{ y : t \mapsto \lambda\left(t^2-1\right) + \mu t + \frac{t^4}{6}\ln t + \frac{t^2}{2}\ln t - \frac{5}{36}t^4 - \frac{3}{4}t^2 \mid (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$