

Devoir surveillé n° 4

Durée : 3 heures. Calculatrices non autorisées.

La notation tiendra largement compte de la qualité de la rédaction.

Les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans l'ordre souhaité.

Les exercices qui ne sont pas traités dans l'ordre doivent être rédigés sur des copies séparées.

Le sujet et le brouillon ne sont pas à rendre. Le barème est indicatif.

Exercice 1. (8 points) Pour $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $x \in]1, +\infty[$, on note $I_{\alpha,\beta}(x) = \int_e^x \frac{1}{t^\alpha (\ln t)^\beta} dt$.

On note de plus $P(\alpha, \beta)$ l'assertion : « L'intégrale $I_{\alpha,\beta}(x)$ admet une limite finie quand $x \rightarrow +\infty$ ».

1. Cas $\beta = 0$:

(a) Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $x > 1$. Calculer $I_{\alpha,0}(x)$.

On prendra garde au cas $\alpha = 1$.

(b) Pour quelles valeurs de α l'assertion $P(\alpha, 0)$ est-elle vraie ?

2. Cas $\beta = -1$:

(a) Déterminer les primitives de $t \mapsto \frac{\ln t}{t}$. En déduire $I_{1,-1}(x)$ pour tout $x > 1$.

(b) Soient $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ et $x > 1$. À l'aide d'une intégration par parties, calculer $I_{\alpha,-1}(x)$.

(c) Pour quelles valeurs de α l'assertion $P(\alpha, -1)$ est-elle vraie ?

3. Cas $\alpha = 1$:

(a) Soient $\beta \in \mathbb{R}$ et $x > 1$. Effectuer le changement de variables $u = \ln t$ dans l'intégrale $I_{1,\beta}(x)$.

(b) Dans le cas $\beta \neq 1$, exprimer $I_{1,\beta}(x)$ en fonction de $I_{\beta,0}$.

(c) Calculer $I_{1,1}(x)$. Pour quelles valeurs de β l'assertion $P(1, \beta)$ est-elle vraie ?

Exercice 2. (8 points) On considère l'application $f : \begin{cases} (\mathbb{N}^*)^2 & \rightarrow (\mathbb{N}^*)^2 \\ (x, y) & \mapsto (x \wedge y, x \vee y) \end{cases}$.

1. Soit $d \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $(a, b) \in f^{-1}(\{d\} \times \mathbb{N}^*)$ si et seulement s'il existe $a', b' \in \mathbb{N}^*$ premiers entre eux tels que $a = da'$ et $b = db'$.

2. En déduire $f^{-1}(\{(15, 180)\})$.

3. Montrer que l'application f n'est ni injective, ni surjective.

4. Soit $(d, m) \in (\mathbb{N}^*)^2$. On note $A = \{(x, y) \in (\mathbb{N}^*)^2 \mid x \leq y\}$.

(a) Montrer que si (d, m) admet un antécédent par f dans A , alors d divise m .

(b) Réciproquement, supposons que d divise m , et notons q le quotient de cette division.

Montrer que (d, m) admet un seul antécédent par f dans A si et seulement si q est premier.

5. En déduire $A', B \subset (\mathbb{N}^*)^2$ tels que $f : A' \rightarrow B$ soit bijective.

Exercice 3. (6 points) On souhaite résoudre l'équation $(E) : \forall x \in \mathbb{R}_+^*, f\left(\frac{1}{x}\right) = x^2(2f'(x) + 1)$.
On raisonne par analyse-synthèse : soit $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ une solution de (E) .

1. Montrer que f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Montrer que f est solution de l'équation $(E') : 4x^2f'' + 8xf' + f = \frac{1}{x^2} - 4x$.
3. On pose $x = e^t$ et $g : t \mapsto f(e^t)$.
Montrer que g est solution de l'équation $(E'') : 4g'' + 4g' + g = e^{-2t} - 4e^t$.
4. Déterminer l'ensemble des solutions S'' de (E'') .
5. En déduire un ensemble C de candidats à être solutions de (E) .
6. Par synthèse, déterminer l'ensemble des solutions S de (E) .

Problème. (12 points) On considère l'équation différentielle d'inconnue $y : I \rightarrow \mathbb{R}$:

$$(E) : y'' - \frac{2t}{t^2 + 1}y' + \frac{2}{t^2 + 1}y = (t^2 + 1)\ln t.$$

I. Calculs préliminaires :

1. Déterminer le domaine de définition I de (E) .
2. Montrer qu'il existe $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$\forall t \in I, \quad \frac{1}{t(t^2 + 1)} = \frac{a}{t} + \frac{bt + c}{t^2 + 1}.$$

3. En déduire une primitive F de $f : \begin{cases} I \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto \frac{1}{t(t^2 + 1)} \end{cases}$.
4. Par intégration par parties, déterminer une primitive G de $g : \begin{cases} I \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto t \ln t \end{cases}$.
5. De même, déterminer une primitive H de $h : \begin{cases} I \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto (1 - t^2) \ln t \end{cases}$.

II. On note (E_h) l'équation homogène associée à (E) .

1. On pose $z : t \mapsto \frac{y(t)}{t}$. Montrer que y est solution de (E_h) si et seulement si $Z = z'$ est solution de l'équation $tZ' + \frac{2}{t^2 + 1}Z = 0$.
2. Résoudre cette équation, et en déduire les solutions de (E_h) .

III. On cherche une solution particulière de (E) de la forme

$$y_p : t \mapsto \lambda(t)t + \mu(t)(t^2 - 1),$$

où $\lambda, \mu : I \rightarrow \mathbb{R}$ vérifient :

$$t\lambda' + (t^2 - 1)\mu' = 0.$$

1. Exprimer y_p' et y_p'' en fonction de λ et μ .
2. Montrer que y_p est solution de (E) si et seulement si : $\lambda' + 2t\mu' = (t^2 + 1)\ln t$.
3. En déduire λ' et μ' , puis y_p .
4. En déduire les solutions de (E) .