Devoir à la maison n° 6
CORRIGÉ

Exercice 1.

1. Soit p dans $\mathbb{N}$, on a : $I(p,0) = \displaystyle\int_0^1 t^p dt = \left[\frac{t^{p+1}}{p+1}\right]_0^1 = \frac{1}{p+1}$.
2. Posons $x = 1-t$. Alors $dx = -dt$, d'où :
$I(p,q) = \displaystyle\int_{t=0}^{t=1} t^p(1-t)^q dt = \int_{x=1}^{x=0} (1-x)^p x^q \times -dx = \int_0^1 x^q(1-x)^p dx = I(q,p)$.
3. Soit $(p,q) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}^*$. Alors, par intégration par parties :
$I(p,q) = \displaystyle\left[\frac{t^{p+1}}{p+1}(1-t)^q\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{t^{p+1}}{p+1} \times -q(1-t)^{q-1}dt = \frac{q}{p+1}I(p+1,q-1)$.
4. Soit $(p,q) \in \mathbb{N}^2$. On raisonne par récurrence : si $q=0$, l'égalité est vraie (le produit vide valant 1). Si $q \geq 1$, on suppose l'égalité vraie pour tout $(p,k) \in \mathbb{N}^2$ avec $k \leq q-1$. Alors, d'après la question précédente et par hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned}
I(p,q) &= \frac{q}{p+1}I(p+1,q-1) \\
&= \frac{q}{p+1}\cdot I(p+1+q-1,0)\cdot\prod_{k=0}^{q-2}\frac{q-1-k}{p+k+2} \\
&= I(p+1+q-1,0)\cdot\frac{q}{p+1}\cdot\prod_{l=1}^{q-1}\frac{q-l}{p+l+1} \quad \text{par changement de variables } l=k+1 \\
&= I(p+q,0)\cdot\prod_{l=0}^{q-1}\frac{q-l}{p+l+1}.
\end{aligned}$$

Par récurrence, l'égalité voulue est donc bien vérifiée.
5. D'après la question précédente et la question 1. :
$I(p,q) = \dfrac{1}{p+q+1}\dfrac{\prod_{k=0}^{q-1}(q-k)}{\prod_{k=0}^{q-1}(p+k+1)} = \dfrac{1}{p+q+1}\dfrac{q!}{\frac{(p+q)!}{p!}} = \dfrac{1}{p+q+1}\dfrac{p!q!}{(p+q)!} = \dfrac{1}{p+q+1}\dfrac{1}{\binom{p+q}{p}}$.
6. D'après la formule du binôme de Newton :
$I(p,q) = \displaystyle\int_0^1 t^p\left(\sum_{k=0}^q \binom{q}{k}(-t)^k\right)dt = \sum_{k=0}^q \binom{q}{k}(-1)^k\int_0^1 t^{p+k}dt = \sum_{k=0}^q \binom{k}{q}\frac{(-1)^k}{p+k+1}$.
On a donc d'après la question précédente :

$$\sum_{k=0}^q \binom{q}{k}\frac{(-1)^k}{p+k+1} = \frac{1}{p+q+1}\frac{1}{\binom{p+q}{p}}.$$

Exercice 2.

1. (a) On procède par intégration par parties :

$$\begin{aligned}\int f(t)dt &= \int \frac{t}{2}\frac{2t}{(1+t^2)^2}dt\\ &= -\frac{t}{2}\frac{1}{1+t^2}+\int\frac{1}{2}\frac{1}{1+t^2}dt\\ &= -\frac{t}{2(1+t^2)}+\frac{1}{2}\arctan(t)+c,\ c\in\mathbb{R}.\end{aligned}$$

   (b) On remarque que : $\forall t\in\mathbb{R},\ g(t)=\dfrac{1+t^2-t^2}{(1+t^2)^2}=\dfrac{1}{1+t^2}-f(t)$, d'où :

$$\int g(t)dt=\int\frac{dt}{1+t^2}-\int f(t)dt=\frac{1}{2}\arctan(t)+\frac{t}{2(1+t^2)}+c,\ c\in\mathbb{R}.$$

2. On cherche y_0 sous la forme $y_0(x)=ax^2+bx+c$. Alors $y_0''(x)=2a$, donc y_0 est solution de (E) si et seulement si $2a(x^2+1)-2(ax^2+bx+c)=0$, c'est-à-dire, par identification, si $2b=0$ et $2a-2c=0$, soit $b=0$ et $a=c$. Donc $y_0(x)=x^2+1$ convient.
3. On pose donc $y=y_0z$. Alors :

$$\begin{aligned}(x^2+1)y''-2y=0 &\Leftrightarrow (x^2+1)(y_0z)''-2y_0z=0\\ &\Leftrightarrow (x^2+1)(y_0''z+2y_0'z'+y_0z'')-2y_0z=0\\ &\Leftrightarrow \left((x^2+1)y_0''-2y_0\right)z+(x^2+1)(2y_0'z'+y_0z'')=0\\ &\Leftrightarrow (x^2+1)(2y_0'z'+y_0z'')=0\\ &\Leftrightarrow 2y_0'z'+y_0z''=0\\ &\Leftrightarrow y_0Z'+2y_0'Z=0\quad \text{où}\quad Z=z',\end{aligned}$$

   donc, avec $y_0(x)=x^2+1$, Z est solution de (E') : $(x^2+1)Z'+4xZ=0$.
4. L'équation (E') se normalise : $Z'+\dfrac{4x}{x^2+1}Z=0$. Cette équation a pour solutions les $Z:x\mapsto\lambda e^{-A(x)}$ où $A(x)=\displaystyle\int\frac{4x}{x^2+1}dx=2\int\frac{2x}{x^2+1}dx=2\ln(x^2+1)$ convient, soit $Z:x\mapsto\dfrac{\lambda}{(x^2+1)^2}=\lambda g(x)$, avec $\lambda\in\mathbb{R}$.
   On a donc $z:x\mapsto\dfrac{\lambda}{2}\arctan(x)+\dfrac{\lambda x}{2(1+x^2)}+\mu$ avec $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$, d'où finalement, comme $y=y_0z$:

$$S=\left\{y:\left\{\begin{array}{rcl}\mathbb{R}&\to&\mathbb{R}\\ x&\mapsto&\lambda\dfrac{x^2+1}{2}\arctan(x)+\dfrac{\lambda x}{2}+\mu(x^2+1)\end{array}\right.\ \middle|\ (\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2\right\}.$$