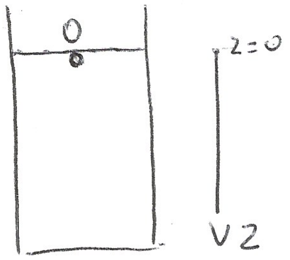
Correction TD dynamique du point materiel (1).

Ex1. Chute d'une bille ds la glycerine.

1] Bilan des forces



la bille de rayon R et de vitesse $\vec{v}$ est soumise à la force de frottement fluide exercée par la glycerine $\boxed{\vec{F} = -6\pi\eta R\vec{v}}$ où η est le coefficient de viscosité de la glycerine (resistance à l'ecoulement d'un fluide).

$\vec{F} = -6\pi\eta R\vec{v}$ formule de Stokes.

$$[\eta] = \frac{[F]}{[R][v]} = \frac{LMT^{-2}}{L\cdot LT^{-1}} = ML^{-1}T^{-1}.$$ ou $$[\eta] = \frac{[\text{Force}]}{[\text{Surface}]\cdot T^{-1}} = [\text{Pression}]\cdot T.$$

Unité SI de η : pascal-seconde (Pa.s) ou poiseuille (Pl).

2°] +3°] La bille est soumise à son poids $\vec{P} = m\vec{g} = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_A \cdot \vec{g}$

à la force d'Archimede $\vec{\Pi}_A = -\frac{4}{3}\pi R^3 \rho_g \cdot \vec{g}$.

et à $\vec{F} = -6\pi\eta R\vec{v}$.

avec $d_A = \frac{\rho_A}{\rho_{eau}}$ et $d_G = \frac{\rho_G}{\rho_{eau}}$ => $\begin{cases} \rho_A = 7800\ kg/m^3 \\ \rho_G = 1300\ kg/m^3 \end{cases}$

le PFD s'écrit ds R_T galileen : $m\vec{a} = \vec{P} + \vec{F} + \vec{\Pi}_A$ et $\vec{a} = \frac{d^2\vec{OM}}{dt^2}$ avec $\begin{cases} \vec{OM} = z(t)\,\vec{e_z} \\ \vec{v} = \dot{z}(t)\,\vec{e_z} \\ \quad = v(t)\,\vec{e_z} \\ \vec{a} = \frac{dv}{dt}\vec{e_z} \end{cases}$

En projection sur $\vec{e_z}$: $m\frac{dv}{dt} = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_A g - \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_g g - 6\pi\eta R v$.

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{\rho_g}{\rho_A}\cdot g - \frac{6\pi\eta R\, v}{\frac{4}{3}\pi R^3 \rho_A} \Rightarrow \boxed{\frac{dv}{dt} + \frac{9\eta}{2R^2\rho_A}\cdot v = g\left(1 - \frac{\rho_g}{\rho_A}\right)}$$

On pose $\boxed{\tau = \frac{2R^2 \cdot \rho_A}{9\eta}}$ et $v_{lim} = \tau \cdot g\left(1-\frac{\rho_g}{\rho_A}\right)$.

$$\boxed{v_{lim} = \frac{2gR^2}{9\eta}(\rho_A-\rho_g)}.$$

Rq On retrouve l'expression de la vitesse limite qui peut être déterminée + rapidement en écrivant :

lorsque $\vec{v} = \vec{v_{lim}} \Rightarrow \vec{a} = 0 \Rightarrow \sum \vec{F} = 0$

$$\left(\frac{4}{3}\pi R^3(\rho_A-\rho_g) - 6\pi\eta R v_{lim}\right)\vec{e_z} = \vec{0}.$$

4°] $v(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}} + v_{lim}$ à $t=0$, $v=0 \Rightarrow A = -v_{lim}$.

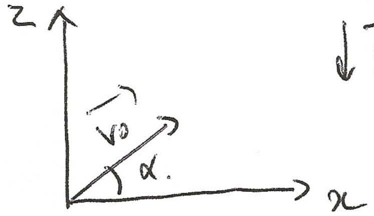
$$\boxed{v(t) = v_{lim}\left(1-\exp^{-\frac{t}{\tau}}\right)}.$$

5°] $v = v_{lim}$ (régime permanent) pour $t > 10\tau$.

6°] $\eta = \frac{2gR^2}{9 \cdot v_{lim}}(\rho_A-\rho_g) = \frac{2 \cdot 9{,}81 \cdot 25 \cdot 10^{-6}}{9 \cdot 2{,}3 \cdot 10^{-3}}[7800-1300]$

$$\eta = \frac{2 \cdot 9{,}81 \cdot 25}{9 \cdot 2{,}3}(7{,}8-1{,}3) = \boxed{1{,}5 \cdot 10^{2}\ \mathrm{Pa \cdot s} = \eta}$$

Exercice 2



$\downarrow \vec{g}$

$\vec{OM} = x\vec{e_x} + z\vec{e_z}$

$\vec{v} = \dot{x}\vec{e_x} + \dot{z}\vec{e_z} = v_x\vec{e_x} + v_z\vec{e_z}$

$\vec{a} = \frac{dv_x}{dt}\vec{e_x} + \frac{dv_z}{dt}\vec{e_z} = \dot{v}_x\vec{e_x} + \dot{v}_z\vec{e_z}$

$m\vec{a} = \vec{P} - \lambda\vec{v}$

proj/$\vec{e_x}$ $m\dot{v}_x = -\lambda v_x$; proj/$\vec{e_z}$: $m\dot{v}_z = -\lambda v_z - mg$

On obtient donc les équations suivantes

$$\begin{cases} \dot{v}_x + \dfrac{\lambda}{m} v_x = 0 \\ \dot{v}_z + \dfrac{\lambda}{m} v_z = -g \end{cases}$$

Avant de les résoudre, on peut obtenir $\vec{v}_{em}$ en écrivant

$$m\vec{g} - \lambda \vec{v}_{em} = \vec{0} \rightarrow \boxed{\vec{v}_{em} = \frac{m\vec{g}}{\lambda}}$$

Il existe donc une asymptote verticale à la trajectoire.

2°] $v_x(t) = A_1 e^{-\frac{t}{\tau}}$ avec $\boxed{\tau = \frac{m}{\lambda}}$.

à $t=0$ $\quad v_0 \cos\alpha = A_1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{v_x(t) = v_0 \cos\alpha\, e^{-\frac{t}{\tau}}. \rightarrow 0 \text{ pour } t > 10\tau}$

$$v_z(t) = A_2 e^{-\frac{t}{\tau}} - \frac{mg}{\lambda}.$$

à $t=0$ $\quad v_0 \sin\alpha = A_2 - \frac{mg}{\lambda} \quad \Rightarrow \quad A_2 = v_0 \sin\alpha + \frac{mg}{\lambda}.$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} v_z(t) &= -\overbrace{\frac{mg}{\lambda}}^{v_{eim}} \left(1 - \exp^{-\frac{t}{\tau}}\right) + v_0 \sin\alpha\, e^{-\frac{t}{\tau}} \quad \text{ou} \\ v_z(t) &= \left(v_0 \sin\alpha + \frac{mg}{\lambda}\right) e^{-\frac{t}{\tau}} - \underbrace{\frac{mg}{\lambda}}_{v_{eim}}. \end{aligned}}$$

3°] $x(t) = \int v_x(t)\,dt = -v_0 \tau \cos\alpha \exp^{-\frac{t}{\tau}} + \text{cte}.$

$t=0$ $\quad 0 = -v_0 \tau \cos\alpha + \text{cte} \quad \Rightarrow \quad \boxed{x(t) = \tau v_0 \cos\alpha \left(1 - \exp^{-\frac{t}{\tau}}\right).} \rightarrow \tau v_0 \cos\alpha$ pour $t > 10\tau$

(3) Asymptote verticale $x_a = \tau v_0 \cos\alpha$.
$= 10 \cdot 30 \cdot 0{,}707 = 212\,\text{m}$

$$z(t) = \int v_z(t)\,dt = -\left(v_0 \sin\alpha + \frac{mg}{\lambda}\right)\tau\, e^{-\frac{t}{\tau}} - \frac{mg}{\lambda}\,t + cste$$

à $t=0$: $0 = -\left(v_0 \sin\alpha + \frac{mg}{\lambda}\right)\tau + cste$

$$z(t) = \tau\left(v_0 \sin\alpha + \frac{mg}{\lambda}\right) e^{-\frac{t}{\tau}} - \frac{mg}{\lambda} t + cste$$

$$\boxed{z(t) = \tau\left(v_0 \sin\alpha + \tau g\right)\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) - \tau g\, t}$$

l'Altitude maximale est atteinte pour $\frac{dz}{dt} = 0$, donc pour un temps t_1 vérifiant :

$$\left(v_0 \sin\alpha + \tau g\right) e^{-\frac{t_1}{\tau}} - \tau g = 0 \Rightarrow \boxed{t_1 = \tau \ln\left(\frac{v_0 \sin\alpha + \tau g}{\tau g}\right)}$$

$$z(t_1) = \tau\left(v_0 \sin\alpha + \tau g\right)\left[1 - \frac{\tau g}{v_0 \sin\alpha + \tau g}\right] - \tau g\, t_1$$

$$\boxed{z(t_1) = \tau v_0 \sin\alpha - \tau g\, t_1}$$

$v_0 = 30\,m s^{-1}$.

$m = 1\,kg$

$\alpha = 45°$

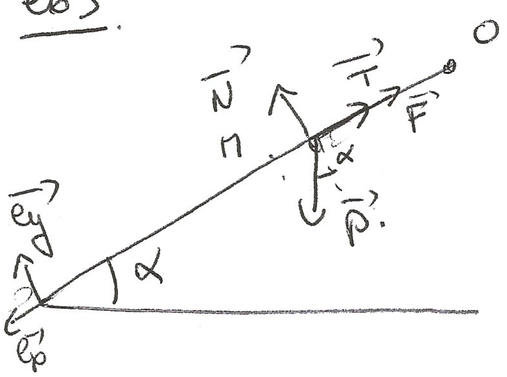
$\lambda = 0{,}1\ SI$

	Sans frottement	Avec frott.
t_1 (s)	2,16 s	1,96
x_{max} (m)	45,9	37,8
z_{max} (m)	22,9	20
portée (m)	92	71

$t_{portée}$ sans frottement $= 4{,}32\,s$

$t_{portée}$ avec frottement $= 4{,}05\,s$

Ex 3.



$$\begin{cases} \vec P = + mg\sin\alpha\,\vec{e_x} - mg\cos\alpha\,\vec{e_y} \\ \vec T = -T\vec{e_x} \\ \vec N = N\vec{e_y} \\ \vec F = -\lambda\vec v \end{cases}$$

$\vec T$, $\vec N$: Reaction du support. et $T>0$ $N>0$.

$\vec F = -\lambda\vec v$ force de frottement exercée par l'air.

$$\begin{cases} \vec{OM} = x(t)\,\vec{e_x} \\ \vec v = \dot x(t)\,\vec{e_x} = v(t)\,\vec{e_x} \\ \vec a = \dfrac{dv}{dt}\,\vec{e_x}. \end{cases}$$

PFD $m\dfrac{d\vec v}{dt} = \vec P + \vec T + \vec N + \vec F$.

$$\begin{cases} \text{projeté sur } \vec{e_x} : & m\dot v = mg\sin\alpha - T - \lambda v. \\ \text{proj}/\vec{e_y} : & 0 = -mg\cos\alpha + N. \end{cases}$$

d'où $\begin{cases} N = mg\cos\alpha. \\ T = f mg\cos\alpha. \end{cases}$

On obtient : $m\dot v + \lambda v = mg\sin\alpha - f mg\cos\alpha = mg(\sin\alpha - f\cos\alpha)$.

$\dot v + \dfrac{v}{\tau} = g(\sin\alpha - f\cos\alpha)$ avec $\boxed{\tau = \dfrac{m}{\lambda}}$ AN $\tau = \dfrac{80}{16} = 5\,s$.

$$\begin{cases} v(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}} + \tau g(\sin\alpha - f\cos\alpha) \\ \text{à } t=0 \quad v=0 \rightarrow A = -\tau g(\sin\alpha - f\cos\alpha). \end{cases}$$

$$\boxed{v(t) = \tau g(\sin\alpha - f\cos\alpha)\left[1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right]}$$

$x(t) = \tau g(\sin\alpha - f\cos\alpha)\cdot t + \tau^2 g(\sin\alpha - f\cos\alpha)e^{-\frac{t}{\tau}} + \text{cste}$

$t=0$ $x=0$ $\rightarrow$ $\text{cste} = -\tau^2 g(\sin\alpha - f\cos\alpha)$.

$$\boxed{x(t) = \tau^2 g(\sin\alpha - f\cos\alpha)\left[\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) - 1\right] + \tau g(\sin\alpha - f\cos\alpha)\,t}$$

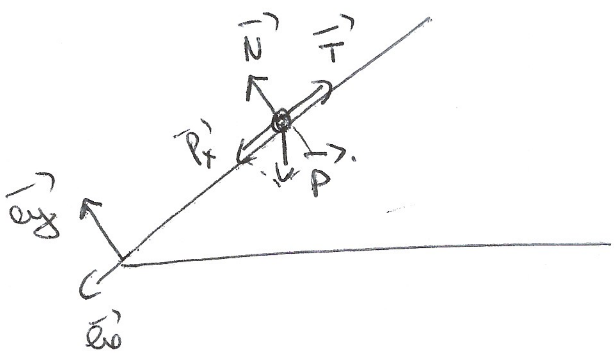
$$\boxed{v_\ell = \tau g(\sin\alpha - f\cos\alpha)}.$$

Rq : v_ℓ pouvait se déterminer en écrivant $\sum \vec{F} = \vec{0}$.

d'où $mg\sin\alpha - f mg\cos\alpha - \lambda v_{lim} = 0$.

AN : $v_{lim} = 18{,}5\ m s^{-1} = 67\ km\,h^{-1}$.

Ex 4



On suppose m en équilibre

$\Rightarrow \sum \vec{F} = \vec{0}$

et $\|\vec{T}\| < \mu_0 \|\vec{N}\|$.

$$\begin{cases} \vec{T} = -T\vec{e_x} \\ \vec{N} = N\vec{e_y} \\ \vec{P} = mg\sin\alpha\,\vec{e_x} - mg\cos\alpha\,\vec{e_y} \end{cases}$$

d'où $/\vec{e_x}$: $0 = mg\sin\alpha - T \Rightarrow T = mg\sin\alpha$

$/\vec{e_y}$: $0 = -mg\cos\alpha + N$ $\quad N = mg\cos\alpha$.

d'où $T < \mu_0 N \rightarrow \sin\alpha < \mu_0\cos\alpha \rightarrow \boxed{tg\,\alpha < \mu_0.}$

Pour faire glisser la caisse vers le bas on applique une force $\vec{F} = F\vec{e_x}$.

Il y a équilibre tant que $\|\vec{T}\| < \mu_0\|\vec{N}\|$ et la caisse se met à glisser lorsque $\|\vec{T}\| = \mu_0\|\vec{N}\|$.

Calcul de la valeur de T : m en équilibre $\Rightarrow$

$$\begin{cases} mg\sin\alpha + F - T = 0 \\ -mg\cos\alpha + N = 0. \end{cases}$$

$N = mg\cos\alpha$ garde la m̂ valeur.

$T = mg\sin\alpha + F \nearrow$ lorsque $F \uparrow$.

et lorsque $T = \mu_0 N$, $\Rightarrow mg\sin\alpha + F = \mu_0 mg\cos\alpha$.

donc $F = mg(\mu_0\cos\alpha - \sin\alpha) = \boxed{mg\cos\alpha\,(\underbrace{\mu_0 - \operatorname{tg}\alpha}_{>0}) = F_{min_1}}$

Pour faire glisser la caisse vers le haut : On applique.

$\vec{F} = -F\vec{e_x}$ avec $F>0$ car $\vec{F}$ dirigé vers le haut.

d'où la condition d'éq : $\begin{cases} mg\sin\alpha - F - T = 0. \\ -mg\cos\alpha + N = 0. \end{cases}$

d'où $\begin{cases} N = mg\cos\alpha \text{ garde la même valeur.} \\ T = mg\sin\alpha - F \searrow \text{ lorsque } F \uparrow. \end{cases}$

$T=0$ pour $F = mg\sin\alpha$.

et $T<0$ pour $F > mg\sin\alpha$

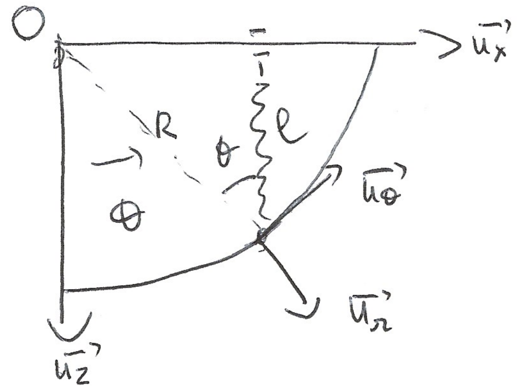
lorsque $T<0$; on pose $T = -T'$ avec $T'>0$.

donc $\vec{T}$ chg de sens

d'où $mg\sin\alpha - F + T' = 0 \rightarrow T' = F - mg\sin\alpha$. $\uparrow$ avec F.

et lorsque $T' = F - mg\sin\alpha = \mu_0 mg\cos\alpha$, la caisse glisse vers le haut d'où $\boxed{F_{m_2} = mg\cos\alpha\,(\mu_0 + \operatorname{tg}\alpha).} > F_{min_1}$.

eo7 . On note $L = \ell_0$



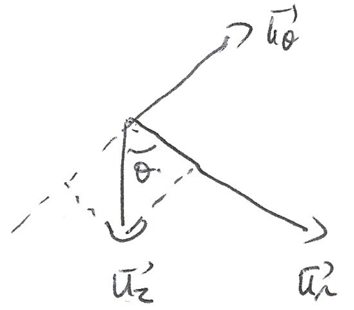
$\vec{OM} = R\vec{u_r}$ $\quad\vec{P} = mg\,\vec{u_z}$ $\quad\vec{T} = -k(\ell-\ell_0)\vec{u_z}$

et $\ell = R\cos\theta$. $\quad\vec{R_N} = R_N\,\vec{u_r}$.

$\vec{OM} = R\vec{u_r}$

$\vec{v} = R\dot{\theta}\,\vec{u_\theta}$

$\vec{a} = -R\dot{\theta}^2\,\vec{u_r} + R\ddot{\theta}\,\vec{u_\theta}$



$\vec{u_z} = \cos\theta\,\vec{u_r} - \sin\theta\,\vec{u_\theta}$

1°)

donc $\vec{P} + \vec{T} + \vec{R_N} = \vec{0}$ à l'éq.

proj/$\vec{u_r}$ $\{mg - k(R\cos\theta_e - \ell_0)]\cos\theta_e = 0$. (1)

proj/$\vec{u_\theta}$ $-[mg - k[R\cos\theta_e - \ell_0]]\sin\theta_e + R_N = 0$. (2)

de (1) $\rightarrow$ $\cos\theta_e = \dfrac{mg + k\ell_0}{kR} < 1$ car d'après l'énoncé $mg < k(R-\ell_0)$

$\Rightarrow \dfrac{mg + k\ell_0}{kR} < 1$.

(2) $\Rightarrow R_N = (mg - kR\cos\theta_e + k\ell_0)\sin\theta_e = 0$.

2°) Equation du mt.

$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{T} + \vec{R_N}$

A linéariser

en projetant sur $\vec{u_\theta}$: $\quad mR\ddot{\theta} = [mg - k(R\cos\theta - \ell_0)]\sin\theta$ équation différentielle non linéaire.

Au voisinage de θ_e, on linéarise $\sin\theta$ et $\cos\theta$ (on approxime la fonction

à sa tangente :

On obtient $mR\ddot{\theta} = \left[mg - kR\left(\cos\theta_e + (\theta-\theta_e)\sin\theta_e\right) + k\ell_0\right]\sin\theta_e$

$= -kR\sin^2\theta_e\,(\theta-\theta_e)$.

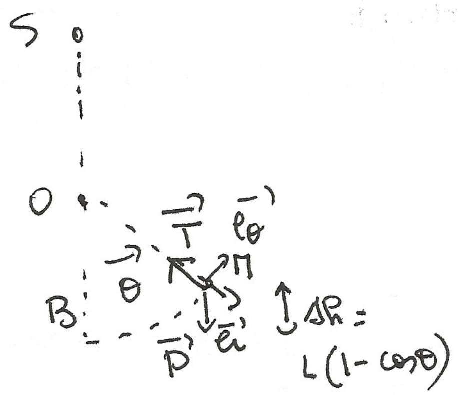
$\Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{k}{m}\sin^2\theta_e\,(\theta-\theta_e) = 0$ ou $\ddot{(\theta-\theta_e)} + \frac{k}{m}(\theta-\theta_e)\sin^2\theta_e = 0$

$\omega_0^2 = \frac{k}{m}\sin^2\theta_e$

et

$\theta-\theta_e = A\cos(\omega_0 t+\varphi)$

Ex 9 Fronde.



$$\begin{cases} \vec{OM} = L\vec{e_r} \\ \vec{v} = L\dot{\theta}\vec{e_\theta} \\ \vec{a} = L\ddot{\theta}\vec{e_\theta} - L\dot{\theta}^2\vec{e_r} \end{cases}$$

M repéré par θ.

$\vec{T} = -T\vec{e_r}$ avec $T \geq 0$. ($T=0 \Rightarrow$ fil non-tendu)

$\vec{P} = mg\cos\theta\,\vec{e_r} - mg\sin\theta\,\vec{e_\theta}$

1] TEC $\frac{1}{2}mv_M^2 - \frac{1}{2}mv_B^2 = -mgL(1-\cos\theta)$

$\Rightarrow$ $\boxed{v(M)^2 = v(B)^2 - 2gL(1-\cos\theta)}$ (1) $\Rightarrow$ $v(M) < v(B)$ car $-2gL(1-\cos\theta) < 0$

et v min en $\theta = \pi$ donc en S.

v max en $\theta = 0$ donc en B.

2°] Calcul de $T(\theta)$

$\delta W_{\vec{T}} = 0$ donc application du PFD $m\vec{a} = \vec{P} + \vec{T}$.

en proj$/\vec{e_r}$ $mg\cos\theta - T(M) = -mL\dot{\theta}^2 = -\frac{m v^2(M)}{L}$

$\boxed{T(M) = mg\cos\theta + \frac{m v^2(M)}{L}}$ $\Rightarrow$ donne $T(M)$ en fonction de $v(M)$ et θ

or $T(M) = mg\cos\theta + \frac{m}{L}\left(v(B)^2 - 2gL(1-\cos\theta)\right)$

$= mg\cos\theta + \frac{m v(B)^2}{L} - 2gL(1-\cos\theta)$

$\boxed{T(M) = 3mg\cos\theta - 2mg + \frac{m v(B)^2}{L}.}$ $\Rightarrow$ donne $T(M)$ en fonction de $v(B)$ et θ.

en S $\quad \theta = \pi \Rightarrow T(S) = -mg + m\dfrac{v^2(S)}{L} > 0 \Rightarrow \boxed{v(S) > \sqrt{gL}}$

AN $\quad \boxed{v(S) > 2{,}2\ m\,s^{-1}.}$

4°) $T(M) = mg\cos\theta + m\dfrac{v^2(M)}{L}$ $\quad$ T max pour $\begin{cases} \cos\theta \text{ max} \Rightarrow \theta = 0 \\ = 1 \\ v_{max} \Rightarrow \text{en B}) \end{cases}$

donc d'après 1

$v^2(S) = v^2(B) - 2gL(1-(-1)) \Rightarrow v^2(S) = v^2(B) - 4gL$

$v^2(B) = v^2(S) + 4gL$

Pour $v_{min}(S) = \sqrt{gL} \rightarrow \boxed{v_{max}(B) = \sqrt{5gL}}$ $\quad$ AN $\quad \boxed{v_{max}(B) = 4{,}9\ m\,s^{-1}}$

$\boxed{T_{max}(B) = mg + m\dfrac{v_B^2}{L} = 6mg}$ $\quad$ AN $\quad \boxed{T_{max} = 5{,}3\ N}$