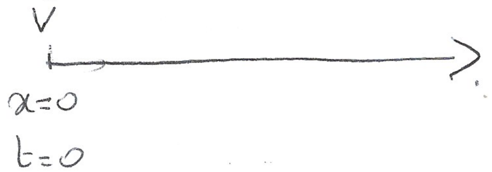
Corrigé TD cinématique.

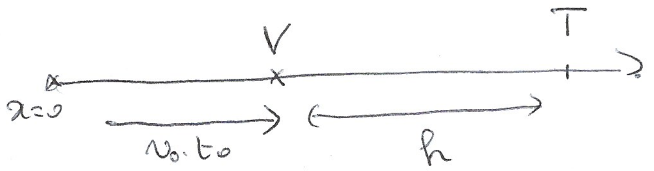
2] Voyageur en retard.



Equation horaire du voyageur V

$x_V(t) = v_0 \cdot t$.

à $t=t_0$, le train démarre avec $a = 0{,}5\,ms^{-1}$ et le voyageur a parcouru une distance $v_0 t_0$.



=> Equation horaire du train T

$$x_T(t) = \frac{a}{2}(t-t_0)^2 + v_0 t_0 + h.$$

à $t = t_0$

a] Le voyageur rejoint son train si l'équation $x_V(t) = x_T(t)$ a une solution => $v_0 t = \frac{a}{2}(t-t_0)^2 + v_0 t_0 + h$.

$\frac{a}{2}(t-t_0)^2 - v_0(t-t_0) + h = 0$ On pose $T = t - t_0$ et T vérifie

$\frac{a}{2}T^2 - v_0 T + h = 0$ $\Delta = v_0^2 - 4h\frac{a}{2} = v_0^2 - 2ha$.

$\Delta = -36 < 0$ → pas de solution => train raté

$f(t) = x_T - x_V = \frac{a}{2}(t-t_0)^2 - v_0(t-t_0) + h$. $f(t)$ minimum si $\frac{df}{dt} = 0$.

et $\frac{df}{dt} = a(t-t_0) - v_0 = 0$ => $t_1 - t_0 = \frac{v_0}{a} = \frac{8}{0{,}5} = 16\,s$.

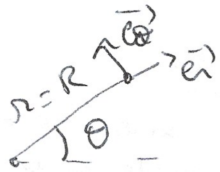
$f_{min} = f(t_1 - t_0) = 36\,m$.

b] $h = 40\,m$ => $\Delta = v_0^2 - 2ha = 24$ → $t - t_0 = \frac{v_0 \pm \sqrt{\Delta}}{a}$ ↗ $6{,}2\,s = t'_1$ ↘ $25{,}8\,s = t''$

c] $\Delta \geq 0$ => $v_0^2 - 2ha \geq 0$ → $h \leq \frac{v_0^2}{2a} = 64\,m$.

Ex 4 Mouvement circulaire décéléré.

a)



$\vec{OM} = R\,\vec{e_r}$ et $\dot{\theta} = \omega_0 = cste$.

$\vec{v}_{M/R} = R\omega_0\,\vec{e_\theta}$

$\vec{a}_{M/R} = -R\omega_0^2\,\vec{e_r}$.

b) à $t=0$ $\ddot{\theta} = \alpha_0$ → $\dot{\theta} = \alpha_0 t + \omega_0$ → $\theta(t) = \alpha_0 \frac{t^2}{2} + \omega_0 t + 0$.

(origine des angles à $t=0$).

$\vec{OM} = R\,\vec{e_r}$ → $\vec{v} = R\dot{\theta}\,\vec{e_\theta}$ →

$\vec{a} = R\alpha_0\,\vec{e_\theta} - R\dot{\theta}^2\,\vec{e_r}$

La particule s'arrête lorsque $\dot{\theta} = 0$ → $\boxed{t_1 = -\frac{\omega_0}{\alpha_0}}$

$\theta_1 = \frac{\alpha_0}{2}\frac{\omega_0^2}{\alpha_0^2} - \frac{\omega_0^2}{\alpha_0} = \boxed{-\frac{\omega_0^2}{2\alpha_0} = \theta_1}$ La distance parcourue est.

$d = R\theta_1 = \boxed{-\frac{R\omega_0^2}{2\alpha_0} = d}$

AN $t_0 = 79{,}4\,s$ $d = 14{,}2\,km$.

Ex 7.

$$\begin{cases} x = R\cos\omega t \\ y = R\sin\omega t \\ z = a \cdot t \end{cases}$$

$a \cdot \omega > 0$

$\Rightarrow [R] = [x] = L$.

$[a] = L \cdot T^{-1}$

$[\omega] = T^{-1}$.

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z. \end{cases}$$

$\Rightarrow r^2 = x^2 + y^2 = R^2\cos^2\omega t + R^2\sin^2\omega t \Rightarrow r^2 = R^2 \Rightarrow \boxed{r = R}$.

et $\theta = \omega t$.

Pas de l'hélice $h = z$ pour $\theta = 2\pi$ $\Rightarrow$ $\omega t_1 = 2\pi$ et $z = a \cdot \frac{2\pi}{\omega}$

$\boxed{h = \frac{2\pi a}{\omega}}$.

Coordonnées cartésiennes :

$\vec{OM} = x\vec{e_x} + y\vec{e_y} + z\vec{e_z}$

$\vec{v} = \dot{x}\vec{e_x} + \dot{y}\vec{e_y} + \dot{z}\vec{e_z}$

$$\boxed{\vec{v}_{M/R} = -\omega R \sin\omega t\,\vec{e_x} + R\omega\cos\omega t\,\vec{e_y} + a\vec{e_z}}$$

Coordonnées cylindriques :

$\vec{OM} = r\vec{e_r} + z\vec{e_z} = R\vec{e_r} + z\vec{e_z}$

$\vec{v}_{M/R} = R\dot{\theta}\vec{e_\theta} + \dot{z}\vec{e_z} = \boxed{R\omega\vec{e_\theta} + a\vec{e_z} = \vec{v}_{M/R}}$ or $\vec{e_r} = \cos\omega t\,\vec{e_x} + \sin\omega t\,\vec{e_y}$

$\vec{e_\theta} = -\sin\omega t\,\vec{e_x} + \cos\omega t\,\vec{e_y}$

d'où $\boxed{\vec{v}_{M/R} = R\omega\left[-\sin\omega t\,\vec{e_x} + \cos\omega t\,\vec{e_y}\right] + a\vec{e_z}}$

On retrouve bien les m résultats.

Calcul de $\|\vec{v}\|$: Avec $\vec{v}$ en coordonnées cartésiennes.

$\|\vec{v}\|^2 = \omega^2R^2\sin^2\omega t + R^2\omega^2\cos^2\omega t + a^2 = R^2\omega^2(\cos^2\omega t + \sin^2\omega t) + a^2$

$= R^2\omega^2 + a^2.$

avec $\vec{v}_{M/R} = R\omega\vec{e_\theta} + a\vec{e_z}$, on retrouve bien $\|\vec{v}\|^2 = R^2\omega^2 + a^2.$

c) $\vec{a}_{M/R} = -\omega^2R\cos\omega t\,\vec{e_x} - R\omega^2\sin\omega t\,\vec{e_y} = -R\omega^2(\cos\omega t\,\vec{e_x} + \sin\omega t\,\vec{e_y})$

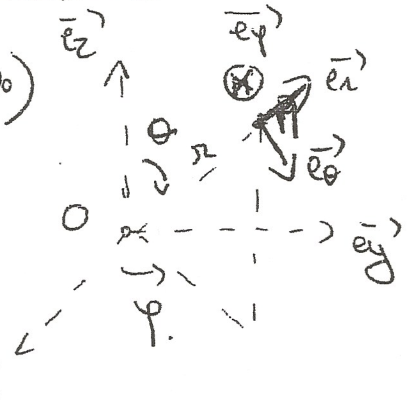
et $\vec{a}_{M/R} = -R\omega^2\vec{e_r}.$

Résultat que l'on retrouve directement à partir de

$\vec{v}_{M/R} = R\omega\vec{e_\theta} + a\vec{e_z} \Rightarrow \vec{a}_{M/R} = -R\omega^2\vec{e_r}.$

Exercice 8.

1)



$\vec{OM} = r\vec{e_r}$ $\quad r>0 \quad 0<\theta<\pi \quad 0<\varphi<2\pi$

$\vec{v}_{M/R} = \dot{r}\vec{e_r} + r\left.\dfrac{d\vec{e_r}}{dt}\right)_R$.

$\vec{e_r}\begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi \\ \cos\theta \end{vmatrix}_R \xrightarrow{\theta\to\theta+\frac{\pi}{2}} \vec{e_\theta}\begin{vmatrix} \cos\theta\cos\varphi \\ \cos\theta\sin\varphi \\ -\sin\theta \end{vmatrix}_R$

$\vec{e_\varphi} = \vec{e_r}\wedge\vec{e_\theta} = \begin{vmatrix} -\sin\varphi \\ +\cos\varphi \\ 0 \end{vmatrix}_R$

$\left.\dfrac{d\vec{e_r}}{dt}\right)_R = \dot{\varphi}\begin{bmatrix} -\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\cos\varphi \\ 0 \end{bmatrix}_R + \dot{\theta}\begin{vmatrix} \cos\theta\cos\varphi \\ \cos\theta\sin\varphi \\ -\sin\theta \end{vmatrix}$

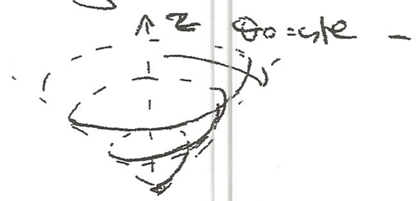
$\Rightarrow \left.\dfrac{d\vec{e_r}}{dt}\right)_R = \dot{\theta}\vec{e_\theta} + \dot{\varphi}\sin\theta\,\vec{e_\varphi}$.

d'où $\boxed{\vec{v}_{M/R} = \dot{r}\vec{e_r} + r\dot{\theta}\vec{e_\theta} + r\dot{\varphi}\sin\theta\,\vec{e_\varphi}}$

2) $r(t) = v_0 t \Rightarrow r$ croît uniformément.

a) $\theta = \theta_0 = \text{cste} \Rightarrow \theta$ est fixe $\Rightarrow$ M se déplace sur un cône de demi angle au sommet θ_0.

$\varphi = \omega t \Rightarrow \varphi$ croît uniformément.



b) $\vec{OM} = v_0 t\vec{e_r} \Rightarrow \boxed{\vec{v}_{M/R} = v_0\vec{e_r} + v_0 t\omega\sin\theta_0\,\vec{e_\varphi}}$. car $\left.\dfrac{d\vec{e_r}}{dt}\right)_R = \omega\sin\theta_0$ puisque $\begin{cases}\dot{\theta}=0\\ \dot{\varphi}=\omega\end{cases}$

$\vec{a}_{M/R} = v_0\left.\dfrac{d\vec{e_r}}{dt}\right)_R + v_0\omega\sin\theta_0\,\vec{e_\varphi} + v_0 t\omega\sin\theta_0\left.\dfrac{d\vec{e_\varphi}}{dt}\right)_R$.

$= v_0\omega\sin\theta_0\,\vec{e_\varphi} + v_0\omega\sin\theta_0\,\vec{e_\varphi} +$ "

Calcul de $\left.\dfrac{d\vec{e_\varphi}}{dt}\right)_R = \dfrac{d}{dt}\left[-\sin\varphi\,\vec{e_x} + \cos\varphi\,\vec{e_y}\right] = \dot{\varphi}\left[-\cos\varphi\,\vec{e_x} - \sin\varphi\,\vec{e_y}\right]$.

$= A\vec{e_r} + B\vec{e_\theta}$ car $\left.\dfrac{d\vec{e_\varphi}}{dt}\right)_R \perp \vec{e_\varphi}$ $(\|\vec{e_\varphi}\|=1)$.

$= \left.\dfrac{d\vec{e_\varphi}}{dt}\right)_R\cdot\vec{e_r} = -\dot{\varphi}\cos\varphi\cdot\sin\theta\cos\varphi - \dot{\varphi}\sin\varphi\cdot\sin\theta\sin\varphi = -\dot{\varphi}\sin\theta_0 = -\omega\sin\theta_0$

$= \left.\dfrac{d\vec{e_\varphi}}{dt}\right)_R\cdot\vec{e_\theta} = -\dot{\varphi}\cos\varphi\cos\theta\cos\varphi - \dot{\varphi}\sin\varphi\cos\theta\sin\varphi = -\dot{\varphi}\cos\theta_0 = -\omega\cos\theta_0$.

$\boxed{\left.\dfrac{d\vec{e_\varphi}}{dt}\right)_R = -\omega\sin\theta_0\,\vec{e_r} - \omega\cos\theta_0\,\vec{e_\theta}}$ et $\vec{a}_{M/R} = -v_0 t\omega^2\sin^2\theta_0\,\vec{e_r} - v_0 t\omega^2\sin\theta_0\cos\theta_0\,\vec{e_\theta} + 2v_0\omega\sin\theta_0\,\vec{e_\varphi}$.