Devoir à la maison n° 6

Exercice 1. Pour tout (p,q) dans $\mathbb{N}^2$, on note $I(p,q) = \displaystyle\int_0^1 t^p(1-t)^q dt$.

1. Pour p dans $\mathbb{N}$, calculer $I(p,0)$.
2. Pour (p,q) dans $\mathbb{N}^2$, à l'aide d'un changement de variable, montrer que $I(p,q) = I(q,p)$.
3. En intégrant par parties, démontrer l'égalité : $\forall (p,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*,\ I(p,q) = \dfrac{q}{p+1} I(p+1, q-1)$.
4. En déduire que : $\forall (p,q) \in \mathbb{N}^2,\ I(p,q) = I(p+q,0) \cdot \displaystyle\prod_{k=0}^{q-1} \frac{q-k}{p+k+1}$.
5. Écrire la formule précédente à l'aide de factorielles, puis d'un coefficient binomial.
6. Développer la forme initiale de $I(p,q)$ grâce à la formule du binôme.
   En déduire une forme factorisée de $\displaystyle\sum_{k=0}^{q} \binom{q}{k} \frac{(-1)^k}{p+k+1}$.

Exercice 2. On cherche les solutions $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de l'équation différentielle :

$$(E) \ : \quad (x^2+1)y'' - 2y = 0.$$

1. (a) Déterminer une primitive de la fonction $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \frac{t^2}{(1+t^2)^2} \end{array} \right.$.

   On pourra remarquer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\dfrac{t^2}{(1+t^2)^2} = \dfrac{t}{2} \dfrac{2t}{(1+t^2)^2}$.

   (b) En déduire une primitive de la fonction $g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \frac{1}{(1+t^2)^2} \end{array} \right.$.
2. Déterminer **une** solution polynomiale de (E), que l'on notera y_0.
3. En posant $y = y_0 z$, Montrer que y est solution de (E) si et seulement si la fonction $Z = z'$ est solution d'une équation différentielle (E') à déterminer.
4. En déduire l'ensemble des solutions de (E).