

Feuille d'exercices 7

ÉLÉMENTS DE CORRECTION

Exercice 1. Soit $k \in \llbracket 2, n \rrbracket$. Alors k divise $n!$ et k divise k , donc k divise $n! + k$. Donc $n! + k$ n'est pas premier.

Il existe donc des ensembles d'entiers consécutifs arbitrairement grands ne contenant aucun nombre premier!

Exercice 2. Comme d'habitude, on raisonne par l'absurde : supposons $x = \frac{\ln 8}{\ln 7}$ irrationnel, soient $p, q \in \mathbb{N}^*$ tels que $\frac{\ln 8}{\ln 7} = \frac{p}{q}$ (on prend directement $p \in \mathbb{N}^*$ car $x > 0$ (puisque \ln est strictement positive sur $]e, +\infty[$)).

On a donc $\frac{\ln 8}{\ln 7} = \frac{p}{q}$, donc $8^q = 7^p$, donc $2^{3q} = 7^p$. D'après l'unicité de la décomposition en facteurs premiers, on a nécessairement $p = q = 0$, ce qui est absurde.

Donc $\frac{\ln 8}{\ln 7}$ est irrationnel.

Exercice 3. On raisonne par récurrence :

Comme $40^0 \times 0! = 1$ divise $(5 \times 0)! = 1$, l'assertion est vraie pour $n = 0$.

Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons l'assertion vraie au rang n . Alors :

$$(5(n+1))! = (5n+5) \times (5n+4) \times (5n+3) \times (5n+2) \times (5n+1) \times (5n)!$$

Par hypothèse de récurrence, $40^n \times n!$ divise $(5n)!$; il suffit donc de montrer que $40 \times (n+1)$ divise $(5n+5) \times (5n+4) \times (5n+3) \times (5n+2) \times (5n+1)$.

Comme $5n+5 = 5 \times (n+1)$, il suffit de montrer que 8 divise $(5n+4) \times (5n+3) \times (5n+2) \times (5n+1)$. C'est un produit de 4 entiers consécutifs, qui contient donc un multiple de 4 et un autre entier pair; donc le produit est divisible par 8.

Donc l'assertion est vraie au rang $n+1$.

Par récurrence, l'assertion est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 4. Notons $n = \prod_{i=1}^r p_i^{\alpha_i}$ la décomposition en facteurs premiers de n . Les diviseurs de n sont alors

les $d = \prod_{i=1}^r p_i^{\beta_i}$ avec $\beta_i \in \llbracket 0, \alpha_i \rrbracket$. On a vu (exercice 8) que $N = \prod_{i=1}^r (\alpha_i + 1)$, et donc :

$$P = \prod_{\beta_1=0}^{\alpha_1} \cdots \prod_{\beta_r=0}^{\alpha_r} \left(\prod_{i=1}^r p_i^{\beta_i} \right) = \prod_{i=1}^r p_i^{(\alpha_1+1) \cdots \frac{\alpha_i(\alpha_i+1)}{2} \cdots (\alpha_r+1)} = n^{\frac{N}{2}}.$$

Exercice 6.

- (a) Soit $n \in \mathbb{Z}$. On a : $3n - 17 = 3(n - 4) - 5$ donc, si $n - 4$ divise $3n - 17$, alors $n - 4$ divise 5, donc $n - 4 = \pm 1$ ou ± 5 , donc $n \in \{-1, 3, 5, 9\}$. Réciproquement, tous ces nombres sont solutions, donc : $S = \{-1, 3, 5, 9\}$.

(b) Soit $n \in \mathbb{Z}$. On a : $2n^2 - 2n + 4 = 2(n+1)^2 - 6(n+1) + 8$ donc, si $n+1$ divise $2n^2 - 2n + 4$, alors $n+1$ divise 8, donc $n+1 = \pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8$, donc $n \in \{-9, -5, -3, -2, 0, 1, 3, 7\}$. Réciproquement, tous ces nombres sont solutions, donc : $S = \{-9, -5, -3, -2, 0, 1, 3, 7\}$.

Exercice 7.

(a)

$$\begin{aligned} xy = 3x + 2y &\Leftrightarrow (x-2)(y-3) = 6 \\ &\Leftrightarrow (x-2, y-3) = (-6, -1), (-3, -2), (-2, -3), (-1, -6), (1, 6), (2, 3), (3, 2), (6, 1) \\ &\Leftrightarrow (x, y) = (-4, 2), (-1, 1), (0, 0), (1, -3), (3, 9), (4, 6), (5, 5), (8, 4). \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{5} &\Leftrightarrow xy = 5x + 5y \\ &\Leftrightarrow (x-5)(y-5) = 25 \\ &\Leftrightarrow (x-5, y-5) = (-25, -1), (-5, -5), (-1, -25), (1, 25), (5, 5), (25, 1) \\ &\Leftrightarrow (x, y) = (-20, 4), (0, 0), (4, -20), (6, 30), (10, 10), (30, 6). \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} x^2 - y^2 - 4x - 2y = 5 &\Leftrightarrow (x-2)^2 - (y+1)^2 = 10 \\ &\Leftrightarrow (x+y-1)(x-y-3) = 10 \\ &\Leftrightarrow (x+y-1, x-y-3) = (-10, -1), (-5, -2), (-2, -5), (-1, -10), \\ &\quad (1, 10), (2, 5), (5, 2), (10, 1), \end{aligned}$$

or $(x+y-1, x-y-3) = (a, b) \Leftrightarrow (2x-4, 2y+2) = (a+b, a-b)$, ce qui est impossible si $a+b$ et $a-b$ sont impairs comme ci-dessus. Donc $S = \emptyset$.

Exercice 9. Supposons que m divise n , notons $n = dm$. Alors, d'après l'identité de Bernoulli :

$$a^n - b^n = (a^m)^d - (b^m)^d = (a^m - b^m) \left((a^m)^{d-1} + (a^m)^{d-2}b^m + \dots + a^m(b^m)^{d-2} + (b^m)^{d-1} \right),$$

donc $a^m - b^m$ divise $a^n - b^n$.

Exercice 11. La fonction $f : x \mapsto x^3 + x$ est bijective de \mathbb{R} dans \mathbb{R} (le vérifier!) donc 1 admet un et un seul antécédent par f ; c'est-à-dire que l'équation $x^3 + x = 1$ a une et une seule solution réelle, d'ailleurs strictement positive d'après l'étude de f .

Supposons cette solution rationnelle égale à $\frac{p}{q}$ où $p, q \in \mathbb{N}^*$ peuvent être supposés premiers entre eux.

Alors :

$$\left(\frac{p}{q}\right)^3 + \frac{p}{q} = 1, \quad \text{donc} \quad p^3 + q^2p = q^3.$$

Soit d un diviseur premier de p , alors d divise p^3 et q^2p , donc d divise q^3 , donc d divise q (puisque d est premier); ce qui est absurde puisque p et q sont premiers entre eux. Donc la solution est irrationnelle.

Exercice 13. Soit d un diviseur commun à $a = 2n + 4$ et $b = 3n + 3$. Alors d divise $3a - 2b = 6$, donc $d = 1, 2, 3, 6$. Ces quatre possibilités de PGCD sont réalisées pour $n = 1 : 6 \wedge 6 = 6$; pour $n = 2 : 8 \wedge 9 = 1$; pour $n = 3 : 10 \wedge 12 = 2$; pour $n = 4 : 12 \wedge 15 = 3$.

Exercice 16. Soit $M \in \mathbb{N}^*$. Par une récurrence directe sur $m \in \mathbb{N}^*$, on montre :

$$\forall m \in \mathbb{N}^*, \quad u_{M+m} = u_m u_{M+1} + u_{m-1} u_M,$$

donc en particulier, pour $M = mn$:

$$\forall m, n \in \mathbb{N}^*, \quad u_{m(n+1)} = u_m u_{mn+1} + u_{m-1} u_{mn}. \quad (\star)$$

Pour $n = 1$, on a donc : $u_{2m} = u_m(u_{m+1} + u_{m-1})$, donc u_m divise u_{2m} ; et d'après (\star) , si u_m divise u_{mn} , alors u_m divise $u_{m(n+1)}$. Par récurrence, u_m divise donc u_{mn} et $u_{m(n+1)}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

De plus : $\forall k \in \mathbb{N}$, $u_k \wedge u_{k+1} = 1$, à nouveau par récurrence (sur la relation $u_{k+1} = u_k + u_{k-1}$). En particulier, $u_{mn} \wedge u_{mn+1} = 1$, donc si d divise u_{mn} et $u_{m(n+1)}$, alors d'après (\star) , d divise u_m .

Donc $u_{mn} \wedge u_{m(n+1)} = u_m$.

Exercice 18. Soit p un nombre premier.

(a) On sait que $\binom{p}{k} = \frac{p!}{k!(p-k)!} = \frac{p \times (p-1)!}{k!(p-k)!}$. Comme p est premier, ni $k!$ ni $(p-k)!$ ne divisent p . Donc $\binom{p}{k} = p \times Q$, c'est-à-dire que p divise $\binom{p}{k}$.

(b) On procède par récurrence sur a :

$1^p = 1$, donc l'assertion est vraie pour $a = 1$.

Soit $a \in \mathbb{N}^*$, supposons l'assertion vraie au rang a . Alors, d'après le résultat précédent :

$$(a+1)^p = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} a^k = pQ + a^p + 1,$$

donc, en utilisant l'hypothèse de récurrence : $(a+1)^p = a^p + 1 \pmod{p} = a + 1 \pmod{p}$.

Par récurrence, l'assertion est vraie pour tout $a \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 19.

(a) Notons $n = \sum_{k=0}^r a_k \times 10^k$ l'écriture binaire de n . Comme $10 = 1 \pmod{9}$, $n = \sum_{k=0}^r a_k \pmod{9}$. Donc

n est multiple de 9 si et seulement si $\sum_{k=0}^r a_k$ est multiple de 9.

(b) Notons $n = \sum_{k=0}^r a_k \times 10^k$ l'écriture binaire de n . Comme $10 = (-1) \pmod{11}$, $n = \sum_{k=0}^r (-1)^k a_k$

$\pmod{11}$. Donc n est multiple de 11 si et seulement si $\sum_{k=0}^r (-1)^k a_k$ est multiple de 11.