TD 18 : Intégrale à paramètre. Convergence suites dans evn. Corrigé partiel

Corrigé très succinct; j'ai été plus expansif en TD mais n'ai pas corrigé le même exercice en détail. Contactez le groupe concerné éventuellement.

Exercice 1 : (Intégrale à paramètre : la flèche du Parthe)

Pour x réel on pose $F(x) = \int_0^\infty \frac{\cos(xt)}{1+t^2}dt$.

On a vu que F était continue et paire sur $\mathbb{R}$.

1) A l'aide d'une IPP, montrer que $F(x) = O(1/x)$ si $x \to +\infty$.

On suppose $x > 0$; à l'aide du changement de variable $t = u/x$, nous avons $F(x) = \int_0^\infty \frac{x\cos(u)}{x^2+u^2}du$.

2) Etablir (On dominera sur tout segment de $\mathbb{R}_+^*$) que F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et exprimer $F'(x)$ sous forme intégrale si $x > 0$.

3) En revenant à la variable d'origine, vérifier que $xF'(x) = F(x) - 2\int_0^\infty \frac{\cos(xt)}{(1+t^2)^2}dt$, ce pour tout $x > 0$.

On pose $G(x) = \int_0^\infty \frac{\cos(xt)}{(1+t^2)^2}dt$.

4) A l'aide de la règle de Leibniz, prouver que G est dérivable sur $\mathbb{R}$.

5) Exprimer G' à l'aide de F.

6) En déduire que F est solution de l'équation différentielle $y'' - y = 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et vérifier enfin que $F(x) = \frac{\pi}{2}e^{-|x|}$ pour tout réel x (Résultat du physicien anglais Stokes).

7) Etudier la dérivabilité de F en 0.

Solution expéditive :

2) Posons $f(x,u) = \frac{\cos(u)}{x^2+u^2}$; la règle de Leibniz s'applique bien car sur tout segment $[a,b] \subset \mathbb{R}_+^*$, on a $|\frac{\delta f}{\delta x}(x,u)| \leq \frac{2x}{(x^2+u^2)^2} \leq \frac{2b}{(a^2+u^2)^2}$, ce pour tout $x \in [a,b]$ et tout $u \geq 0$.

Comme $\phi : u \to \frac{2b}{(a^2+u^2)^2}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et que $\phi(u) = O(1/u^4)$ en $+\infty$. L'intégrabilité de la dominante est acquise (les autres hypothèses se vérifiant sans problème).

On peut affirmer que F que est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et $F'(x) = \int_0^\infty \frac{u^2-x^2}{(x^2+u^2)^2}\cos(u)du$, ce pour $x > 0$.

3) Calculs directs.

4) On domine sur tout segment la dérivée partielle suivant x (cf 2)).

5) La règle de Leibniz validée en 4) donne $G'(x) = \frac{-t\sin(xt)}{(1+t^2)^2}dt$, pour $x > 0$.

Une intégration par parties donne (à vous de vérifier l'existence du crochet) :

$$G'(x) = \left[\frac{\sin(xt)}{2(1+t^2)}\right]_0^{+\infty} - \frac{x}{2}\int_0^\infty \frac{\cos(xt)}{1+t^2}dt = 0 - 0 - \frac{x}{2}F(x).$$

6) La dérivabilité de G sur $\mathbb{R}_+^*$ entraîne celle (avec la relation de 3)) de F' sur le même intervalle. En dérivant la relation de 3), on récupère avec 5) $F''(x) - F(x) = 0$ pour $x > 0$.

Il existe donc deux réels A et B tels que $F(x) = Ae^{-x} + Be^x$, pour tout $x > 0$.

Comme (cf 1)) $F(x) \to 0$ si $x \to +\infty$, on a $B = 0$.

Toujours en référence à 1) : $F(x) \to F(0) = \frac{\pi}{2}$ si $x \to 0$ d'où $A = \frac{\pi}{2}$.

Ainsi, pour $x \geq 0$, $F(x) = \frac{\pi}{2}e^{-x}$ mais la parité de F nous donne aussi $F(x) = \frac{\pi}{2}e^{-|x|}$ pour tout réel x.

7) Non car le taux d'accroissement à l'origine possède des limites latérales opposées $\mp\frac{\pi}{2}$ ■

Exercice 2 : (Convergence de suites de matrices : Centrale 2023)

Notations et définitions

Une matrice est dite positive si tous ses coefficients le sont.

- Le spectre d'une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est noté $\text{sp}(A)$.
- Le rayon spectral d'une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, de spectre non vide, est le réel positif ou nul, noté $\rho(A)$, défini par :

$$\rho(A) = \max\{|\lambda| \mid \lambda \in \text{sp}(A)\}$$

- On dit qu'une norme $N : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{R}$ est sous-multiplicative si, pour toutes matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$,

$$N(AB) \leq N(A)N(B).$$

Matrices strictement positives de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

Soit a, b, c et d des nombres réels strictement positifs et $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

1) Exprimer le discriminant Δ du polynôme caractéristique de A en fonction de a, b, c et d.
2)Montrer que $\Delta > 0$. En déduire qu'il existe deux réels λ et μ, vérifiant $\lambda < \mu$, tels que A soit semblable à la matrice $\begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$.
3) Montrer que $|\lambda| < \mu$.
4) Montrer que la suite $\left(A^k\right)_{k\in\mathbb{N}^*}$ converge vers une matrice L non nulle si et seulement si $\mu = 1$. En cas de convergence, préciser le rang de L puis montrer que L est la matrice d'un projecteur de $\mathbb{R}^2$.
5) Soit α et β deux réels de $]0,1[$ et B la matrice $\begin{pmatrix} 1-\alpha & \beta \\ \alpha & 1-\beta \end{pmatrix}$. Montrer que B est semblable à la matrice $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1-\alpha-\beta \end{pmatrix}$ et donner une matrice S de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, inversible, telle que $B = SDS^{-1}$.
6) En déduire que la suite $\left(B^k\right)_{k\in\mathbb{N}^*}$ converge vers une matrice Λ que l'on explicitera.

Normes sous-multiplicatives sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$; rayon spectral

Exemples de normes sous-multiplicatives sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

Pour toute matrice $A = (A_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on pose

$$\|A\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n}\left(\sum_{j=1}^n |A_{ij}|\right) \quad \text{et} \quad \|A\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n |A_{ij}|^2\right)^{1/2}.$$

7) Montrer que $\|\cdot\|_\infty$ est une norme sous-multiplicative sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
8) On admet que $\|\cdot\|_2$ est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$; montrer que cette norme est sous-multiplicative.
9) Soit N une norme sous-multiplicative sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et S une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
Montrer que l'on définit une norme sous-multiplicative ν sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ en posant $\nu(A) = N\left(S^{-1}AS\right)$ pour toute $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Rayon spectral

Soit n un entier supérieur ou égal à 2 et A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
10) Soit S une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Comparer $\rho(A)$ et $\rho\left(S^{-1}AS\right)$.
Solution :
Ils sont identiques puisque deux matrices semblables ont même spectre■
11) Justifier que A est trigonalisable.
Comparer, pour $k \in \mathbb{N}^*, \rho\left(A^k\right)$ et $\rho(A)^k$ et, pour $\alpha \in \mathbb{C}, \rho(\alpha A)$ et $\rho(A)$.

Solution :
i) Toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ étant tz, A l'est aussi$\square$
Comme (cf cours) $\lambda \in Sp(A) \Longrightarrow \lambda^k \in Sp(A^k)$, nous obtenons $\rho(A)^k \leq \rho\left(A^k\right)$.
Il me semble inutile de se lancer dans une inégalité inverse.
On a sans problème $\rho(\alpha A) = |\alpha|\rho(A)$■
12) Montrer que, pour toute norme N sous-multiplicative sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on a $\rho(A) \leq N(A)$.
On pourra fixer une valeur propre λ de A et mettre en évidence une matrice $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, non nulle, telle que $AH = \lambda H$.
Solution :
Considérons tout d'abord λ telle que le module de celle-ci soit exactement $\rho(A)$ puis associons à λ une colonne propre X et posons H la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dont toutes les colonnes soient justement X.
On consaste alors que $H \neq O_n$ et que $AH = \lambda H$ donc, en passant aux normes que $N(AH) = |\lambda|N(H)$ (homogénéité) puis, par sous-multiplicativité de N, $N(A)N(H) \geq |\lambda|N(H)$.
Comme $H \neq O_n$, $N(H) > 0$ soit, en simplifiant : $N(A) \geq |\lambda| = \rho(A)$■
Le but de cette section est de montrer que, pour tout réel strictement positif $\varepsilon > 0$, il existe une norme N sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, sous-multiplicative (dépendant de A et de ε), telle que :

$$N(A) \leq \rho(A) + \varepsilon.$$

À cette fin, on introduit, pour tout réel strictement positif τ, la matrice diagonale

$$D_\tau = \operatorname{diag}\left(1, \tau, \ldots, \tau^{n-1}\right).$$

et on considère une matrice T triangulaire supérieure de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
13) Calculer le produit $D_\tau^{-1} T D_\tau$ en précisant, pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, l'expression du coefficient en position (i,j) de la matrice $D_\tau^{-1} T D_\tau$ en fonction de τ et des coefficients de la matrice T.
Solution :
Posons $U = D_\tau^{-1} T D_\tau$ alors $U_{ij} = \tau^{i-j} T_{ij}$, ce pour $i \leq j$, les autres coefficients étant nuls car matrice triangulaire supérieure■
14) Montrer qu'il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout $\tau \in \mathbb{R}$ vérifiant $|\tau| \leq \delta$, on a

$$\left\|D_\tau^{-1} T D_\tau\right\|_\infty \leq \rho(T) + \varepsilon.$$

Solution :
Pour chaque $i \in [\![1,n]\!]$.
En prenant déjà $\tau < 1$ et par inégalité triangulaire et en se souvenant que les coefficients diagonaux de T en sont les valeurs propres, il vient :
$|\sum_{j=1}^{n} U_{ij}| \leq |T_{ii}| + \tau(\sum_{j=2}^{n} |T_{ij}|) \leq \rho(T) + \tau \|T\|_\infty$ donc en prenant $\delta = \dfrac{\epsilon}{1 + \|T\|_\infty}$, on a ce que l'on veut par passage au maximum■
15) Conclure.
Solution :
Comme A est tz, il existe une matrice inversible P et une matrice triangulaire T de même taille telles que $T = P^{-1}AP$.
Dés lors en posant $S = PD_\tau$ qui est inversible comme produit de telles matrices et $N : M \to \left\|S^{-1}MS\right\|_\infty$ qui se trouve sous-multipicative par le passage précédent, nous avons $N(A) = \left\|D_\tau^{-1} T D_\tau\right\|_\infty \leq \rho(T) + \varepsilon = \rho(A) + \varepsilon$, puisque deux matrices semblables ont même rayon spectral comme déjà observé ■
16) Utiliser ce qui précède pour montrer que la suite $\left(A^k\right)_{k \in \mathbb{N}^*}$ converge vers la matrice nulle si et seulement si $\rho(A) < 1$.
Solution :
Supposons en premier lieu que la suite $\left(A^k\right)_{k \in \mathbb{N}^*}$ converge vers la matrice nulle.
Donc pour toute norme sous-multiplicative de $M_n(\mathbb{C})$(il en existe 7) et 8) et en dimension finie la convergence de dépend pas de la norme) N nous avons $N(A^k) \to 0$ (pour $k \to +\infty$ sos-entendu désormais) or 11) et 12) montrent que $0 \leq (\rho(A))^k \leq \rho(A^k) \leq N(A^k)$. Ainsi la suite géométrique de raison positive $\rho(A)$ converge vers 0 donc $\rho(A) < 1$.
Inversement si cette inégalité nous sert d'hypothèse.

Par 15 (avec ϵ suffisamment petit), il existe N une norme sous-multiplicative de $M_n(\mathbb{C})$ telle que $N(A) < 1$ donc, par sous multiplicativité, $N(A^k) \leq (N(A))^k$, pour tout k; le théorème des gendarmes permet de conclure ■

17) Le rayon spectral est-il une norme sur $M_n(\mathbb{C})$? **Solution :**

Non la séparation mise en défaut avec une matrice nilpotente non nulle ■