Devoir à la maison n° 5

Exercice 1. Soit $f : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (x+y, xy) \end{array} \right.$.

1. Déterminer tous les antécédents par f du couple $(4,4)$; du couple $(1,1)$; du couple $(0,-4)$.
2. L'application f est-elle injective ? surjective ?
3. Montrer qu'un couple $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ admet un antécédent par f si et seulement si $x^2 - 4y \geq 0$.
   Représenter graphiquement l'ensemble correspondant.
4. Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Déterminer l'image réciproque par f de la droite d'équation $x = a$, et l'image réciproque par f de la droite d'équation $y = b$. Représenter graphiquement ces ensembles.

Exercice 2.

1. Soient $a, b \in \mathbb{N}^*$ premiers entre eux. Montrer que si ab est un carré, alors a et b sont des carrés.
2. Soit $(x,y,z) \in (\mathbb{N}^*)^3$ un triplet *pythagoricien*, c'est-à-dire que $x^2 + y^2 = z^2$.
   (a) Soit d un diviseur commun à x, y et z. On note x', y', z' les quotients correspondants.
   Montrer que (x', y', z') est encore pythagoricien.
   (b) On suppose à présent que (x,y,z) est pythagoricien *primitif*, c'est-à-dire que x, y et z sont premiers entre eux. Montrer que x et y sont de parité différente, puis que z est impair.
   Par la suite, dans un triplet pythagoricien primitif (x,y,z), x *est supposé impair et* y *pair.*
   (c) Montrer qu'il existe alors $u, v \in \mathbb{N}^*$ premiers entre eux tels que $z + x = 2u^2$ et $z - x = 2v^2$.
   Déterminer x, y et z en fonction de u et v.
   On dit que (u,v) *est un* paramétrage *du triplet pythagoricien primitif* (x,y,z).
3. On suppose qu'il existe $a, b, c \in \mathbb{N}^*$ premiers entre eux tels que $a^4 + b^4 = c^2$.
   (a) Montrer que, quitte à échanger a et b, (a^2, b^2, c) est pythagoricien primitif ; soit (p,q) son paramétrage, puis que (a,q,p) est pythagoricien primitif ; soit (m,n) son paramétrage.
   (b) Montrer que p et $2q$ sont des carrés ; on note c' et d' leurs racines,
   puis que m et n sont des carrés ; on note a' et b' leurs racines.
   (c) Vérifier que $a', b', c' \in \mathbb{N}^*$, que $a'^4 + b'^4 = c'^2$, et que $c' < c$. Conclure à une contradiction.
4. En déduire que, pour tout $(x,y,z) \in (\mathbb{N}^*)^3$, $x^4 + y^4 \neq z^4$.