Devoir surveillé n° 3
CORRIGÉ

Exercice 1.

1. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$. $f_n(x)$ est défini lorsque $\ln(x)$ l'est, donc $D = \mathbb{R}_+^*$.
On a directement : $f_n(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Et par croissances comparées, $f_n(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$.

(b) La fonction f_n est le produit de $x \mapsto x$ par $x \mapsto \ln x$ (n fois), usuellement dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$, donc f_n est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f_n'(x) = (\ln(x))^n + x \times n(\ln(x))^{n-1} \times \frac{1}{x} = (\ln(x))^{n-1}(\ln(x)+n).$$

(c) La tangente en e à la courbe de f_n a pour équation :

$$y = f_n'(e)(x-e) + f_n(e) = (n+1)(x-e) + e = (n+1)x - ne.$$

2. (a) Soit $x \in D$. Comme $x \neq 0$, on a :

$$f_1(x) = f_2(x) \Leftrightarrow x\ln(x) = x\ln(x)^2 \Leftrightarrow \ln(x) = 0 \text{ ou } \ln(x) = 1 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ou } e.$$

Les courbes de f_1 et de f_2 se rencontrent donc deux fois, en 1 et en e. Comme f_1 et f_2 sont continues, les positions relatives des courbes restent inchangées entre ces points.

- Sur $]0,1[$: $f_1(x) < 0$ et $f_2(x) > 0$, donc la courbe de f_1 est en-dessous de celle de f_2,
- Sur $]1,e[$: on a par exemple $f_1(2) = 2\ln 2 > f_2(2) = 2\ln^2(2)$ puisque $\ln 2 < 1$, donc la courbe de f_1 est au-dessus de celle de f_2,
- Sur $]e,+\infty[$: par croissances comparées, la courbe de f_1 est en-dessous de celle de f_2.

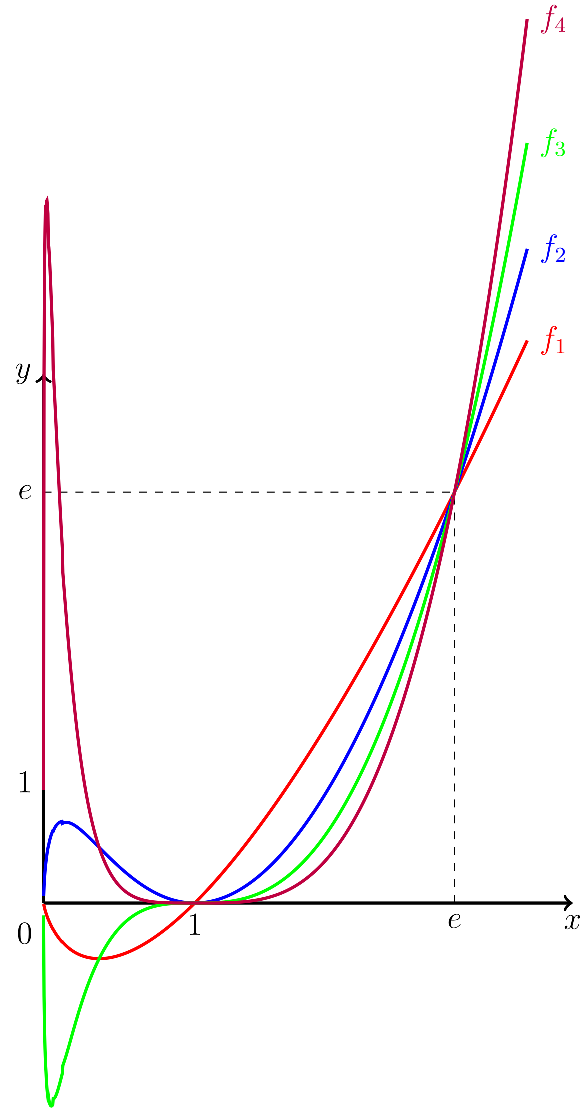
(b) On a : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f_1'(x) = \ln(x) + 1 > 0 \Leftrightarrow x > \frac{1}{e}$, d'où le tableau :

x	0		$\frac{1}{e}$		$+\infty$
$f_1'(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
f_1	0	$\searrow$	$-\frac{1}{e}$	$\nearrow$	$+\infty$

De même : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f_2'(x) = \ln(x)\,(\ln(x)+2) > 0 \Leftrightarrow x < \frac{1}{e^2}$ ou $x > 1$, d'où le tableau :

x	0		$\frac{1}{e^2}$		1		$+\infty$
$f_2'(x)$	$\Vert$	$+$	0	$-$	0	$+$	
f_2	0	$\nearrow$	$\frac{4}{e^2}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

(c)



3. On a : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f_n'(x) = (\ln(x))^{n-1}\left(\ln(x)+n\right) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{1}{e^n} & \text{si } n \text{ est impair,} \\ x < \frac{1}{e^n} \text{ ou } x > 1 & \text{si } n \text{ est pair.} \end{cases}$

   On en déduit, si n est impair :

x	0		$\frac{1}{e^n}$		$+\infty$
$f_n'(x)$	$\vert\vert$	$-$	0	$+$	
f_n	0	$\searrow$	$-\frac{n^n}{e^n}$	$\nearrow$	$+\infty$

   et si n est pair :

x	0		$\frac{1}{e^n}$		1		$+\infty$
$f_2'(x)$	$\vert\vert$	$+$	0	$-$	0	$+$	
f_2	0	$\nearrow$	$\frac{n^n}{e^n}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

4. Cf le graphe.

Exercice 2.

1. On reconnaît une somme géométrique de raison $\omega^p = e^{i\frac{2p\pi}{n}} \neq 1$. Donc :

$$\sum_{k=1}^{n} \omega^{pk} = \omega^p \frac{1-(\omega^p)^n}{1-\omega^p} = \omega^p \frac{1-(\omega^n)^p}{1-\omega^p} = 0 \quad \text{car } \omega^n = 1.$$

   Si $p = n$, alors : $\forall k \in [\![1, n]\!],\ \omega^{nk} = 1$, donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \omega^{nk} = n$.

2. Soit $z = x + iy \in \mathbb{C}$. On a : $z^2 = (x^2 - y^2) + 2ixy$, donc $\mathrm{Im}(z^2) = 2xy$, donc $f(z) = \dfrac{1}{2}\mathrm{Im}(z^2)$.
   Le nombre z est également l'affixe du point du plan de coordonnées (x, y). À cette affixe, l'application f associe le produit xy des coordonnées, comme le fait une table de multiplication standard.
3. Le polygone considéré est l'image par une certaine translation, rotation et homothétie du polygone dont les affixes des sommets sont les racines $n^{\text{èmes}}$ de l'unité. Soit c le facteur de translation, θ l'angle de rotation et r le facteur d'homothétie, alors : $\forall k \in [\![1, n]\!],\ z_k = c + re^{i\theta}\omega^k$. Donc $b = re^{i\theta}$.
   Les rôles de c, r et θ sont décrits ci-dessus ; c est par ailleurs le centre (l'isobarycentre) du polygone.
4. On a :

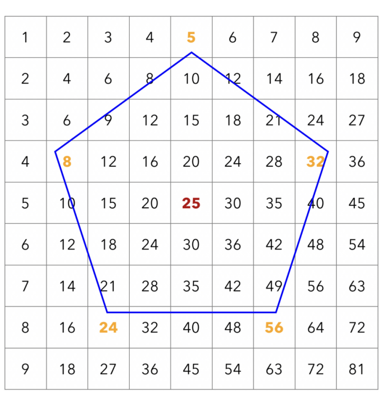
$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(z_k) = \frac{1}{2n}\mathrm{Im}\left(\sum_{k=1}^{n} z_k^2\right),$$

   où : $\forall k \in [\![1, n]\!],\ z_k^2 = (c + b\omega^k)^2 = c^2 + 2bc\omega^k + b^2\omega^{2k}$, donc :

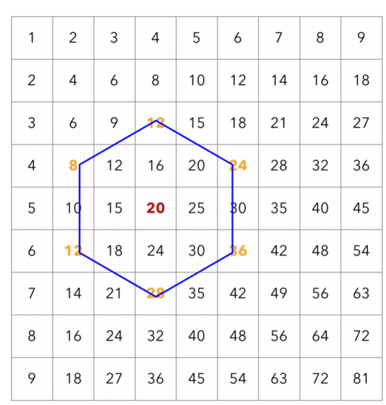
$$\sum_{k=1}^{n} z_k^2 = \sum_{k=1}^{n} c^2 + 2bc\sum_{k=1}^{n} \omega^k + b^2 \sum_{k=1}^{n} \omega^{2k} = nc^2 \quad \text{d'après 1.,}$$

   donc : $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(z_k) = \frac{1}{2}\mathrm{Im}\left(c^2\right) = f(c)$.

5. Le résultat ci-dessus signifie que, lorsqu'on trace un polygone régulier sur une table de multiplication, la moyenne des valeurs aux sommets est égale à la valeur au centre. Par exemple :



$\dfrac{5+32+56+24+8}{5} = 25$



$\dfrac{12+24+36+28+12+8}{6} = 20$

Cet exercice est inspiré de la publication de Charles Delaporte disponible ici.

Exercice 3.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. $f(x)$ est défini lorsque $x \neq 0$, $x-1 \geq 0$, et $\dfrac{2\sqrt{x-1}}{x} \in [-1,1]$, c'est-à-dire $4(x-1) \leq x^2$, c'est-à-dire $(x-2)^2 \geq 0$. Donc f est définie sur $D_f = [1,+\infty[$ et continue sur cet intervalle comme composée de fonctions usuellement continues. Elle est dérivable lorsque $x-1 > 0$ et $\dfrac{2\sqrt{x-1}}{x} \in]-1,1[$, c'est-à-dire $x \neq 2$, donc sur $D'_f =]1,2[\cup]2,+\infty[$.
   $g(x)$ est défini lorsque $x-1 \geq 0$, donc g est définie sur $D_g = [1,+\infty[$ et continue sur cet intervalle car composée de fonctions continues. Elle est dérivable lorsque $x-1>0$, donc sur $D'_g =]1,+\infty[$.

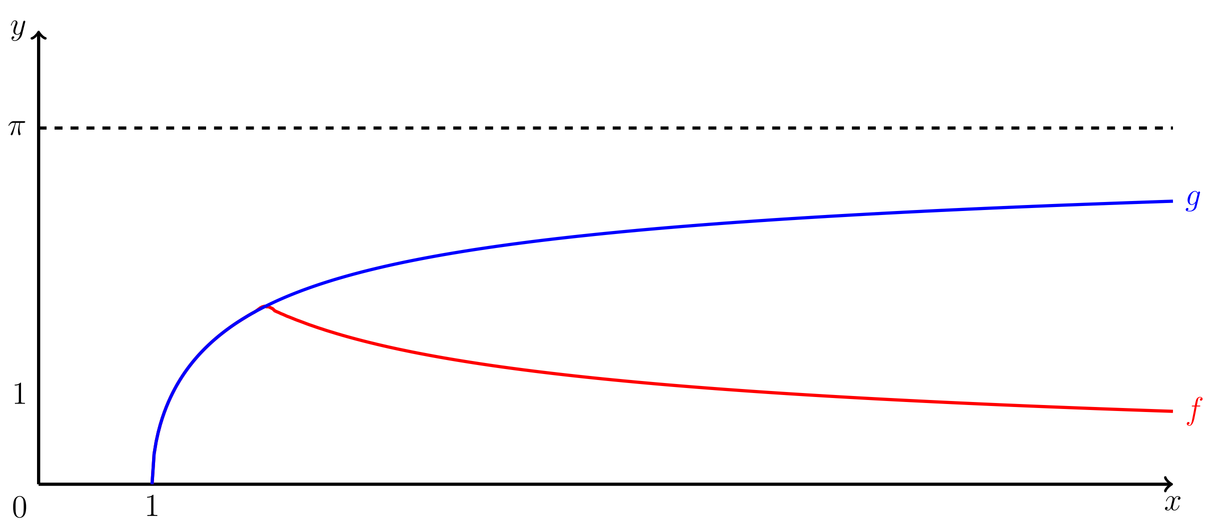
2. On a : $f = \arcsin \circ u$ avec $u : x \mapsto 2\dfrac{\sqrt{x-1}}{x}$, donc : $\forall x \in D'_f,\ f'(x) = \dfrac{u'(x)}{\sqrt{1-u(x)^2}}$, avec $u'(x) = \dfrac{2-x}{x^2\sqrt{x-1}}$. Finalement : $\forall x \in D'_f,\ f'(x) = \dfrac{1}{x\sqrt{x-1}}\dfrac{2-x}{|2-x|}$.
   De même : $g = \arctan \circ v$ avec $x : x \mapsto \sqrt{x-1}$, donc : $\forall x \in\ D'_g,\ g'(x) = \dfrac{v'(x)}{1+v(x)^2}$, avec $v'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x-1}}$. Finalement : $\forall x \in\ D'_g,\ g'(x) = \dfrac{1}{x\sqrt{x-1}}$.
   Les deux fonctions ont la même dérivée sur $]1,2[$, donc, comme elles sont continues en 1 et en 2, elles diffèrent sur $[1,2]$ d'une constante égale à $f(1)-g(1) = 0-0 = 0$. Donc f et g sont égales sur $[1,2]$.

3.

x	1		2		$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$	$+$	$\Vert$	$-$	
f	0	$\nearrow$	$\frac{\pi}{2}$	$\searrow$	0

x	1		$+\infty$
$g'(x)$	$\Vert$	$+$	
g	0	$\nearrow$	π

4.



Problème.

I. L'équation (E_2) : $z^2+z+1=0$ a pour discriminant $\Delta = 1-4=-3$, donc a pour solutions $z_{1,2} = \dfrac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$. On a $|z_{1,2}|^2 = \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 1$, donc $|z_{1,2}| = 1 < 2$.

II. 1. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ car polynomiale, et : $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = 3x^2+1>0$, donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. De plus, $f(x) \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} -\infty$ et $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

2. D'après la question précédente et d'après le théorème de la bijection monotone, f est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R} \ni 0$, donc 0 admet un et un seul antécédent r par f. De plus, $f(-1) = -1 < 0$ et $f\left(-\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{3}{8} > 0$, donc comme f est croissante, $r \in \left]-1, -\dfrac{1}{2}\right[$.

3. En développant : $z^3+z+1 = (z-r)(z-z_1)(z-z_2) = z^3-(r+z_1+z_2)z^2+(rz_1+rz_2+z_1z_2)z - rz_1z_2$, donc par identification : $r+z_1+z_2=0$ et $-rz_1z_2=1$. Donc $z_1+z_2=-r$ et $z_1z_2 = -\dfrac{1}{r}$.

4. On a $|z_1+z_2| = |r| < 1$ et $|z_1z_2| = \dfrac{1}{|r|} < \dfrac{1}{\frac{1}{2}} = 2$.

5. On a $z_1 = z_1+z_2-z_2$, donc $|z_1| = |z_1+z_2-z_2| \leq |z_1+z_2| + |-z_2|$ d'après l'inégalité triangulaire. Or d'après la question précédente, $|z_1+z_2|<1$ et $|-z_2| = |z_2| < \dfrac{2}{|z_1|}$, donc $|z_1| < 1 + \dfrac{2}{|z_1|}$.

Si $|z_1| \geq 2$, alors d'après l'inégalité précédente : $|z_1| < 1 + \dfrac{2}{2} = 2$, ce qui est absurde. Donc $|z_1|<2$, et donc par symétrie $|z_2|<2$. Comme $|r|<2$ également, on a le résultat voulu.

III. 1. On a $a^n = -a-1$, donc par inégalité triangulaire : $|a|^n = |-a-1| \leq |-a| + |-1| = |a|+1$.

2. La fonction $f : x \mapsto x^n - x - 1$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et : $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f'(x) = nx^{n-1}-1$. En particulier : $\forall x \geq 2,\ f'(x) > 0$ et $f(2) = 2^n - 3 > 0$ (car $n \geq 2$), donc f est strictement positive sur $[2, +\infty[$. Comme $f(|a|) \leq 0$, on a donc $|a| < 2$.

Donc pour tout $n \geq 2$, les solutions de l'équation (E_n) sont de module strictement inférieur à 2.