Devoir surveillé n° 3

Durée : 3 heures. Calculatrices non autorisées.
La notation tiendra largement compte de la qualité de la rédaction.
Les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans l'ordre souhaité.
Les exercices qui ne sont pas traités dans l'ordre doivent être rédigés sur des copies séparées.
Le sujet et le brouillon ne sont pas à rendre. Le barème est indicatif.

Exercice 1. *(8 points)* Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $f_n : x \mapsto x\,(\ln(x))^n$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   (a) Déterminer le domaine de définition D de f_n. Quelles sont les limites de f_n aux bornes de D ?
   (b) Étudier la dérivabilité de f_n, et calculer sa dérivée.
   (c) Déterminer l'équation cartésienne de la tangente en e à la courbe de f_n.
2. (a) Résoudre l'équation $f_1(x) = f_2(x)$. En déduire les positions relatives des courbes de f_1 et de f_2.
   (b) Dresser le tableau de variations complet de f_1. Faire de même pour f_2.
   (c) Tracer, sur un même graphe, les courbes de f_1 et de f_2.
3. Dresser le tableau de variations de f_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. *On pourra distinguer les cas n pair et impair.*
4. Rajouter au graphe précédent les courbes de f_3 et de f_4.

Exercice 2. *(6 points)* Soit un entier $n \geq 3$. On note $\omega = e^{i\frac{2\pi}{n}}$.

1. Soit $p \in [\![1, n-1]\!]$. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \omega^{pk} = 0$. Que se passe-t-il pour $p = n$?
2. On note, pour tout $z = x + iy \in \mathbb{C}$, $f(z) = xy$. Montrer que : $\forall z \in \mathbb{C},\ f(z) = \dfrac{1}{2}\mathrm{Im}(z^2)$.
   L'application f est appelée la « table de multiplication ». Justifier cette appellation.
3. On considère à présent un polygone régulier à n côtés. On note $z_1, z_2, \ldots, z_n$ les affixes de ses sommets.
   Montrer qu'il existe $b, c \in \mathbb{C}$ tels que : $\forall k \in [\![1, n]\!],\ z_k - c = b\omega^k$.
   Que représentent géométriquement le nombre c ? le module de b ? l'argument de b ?
4. Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} z_k^2$. En déduire que la moyenne des $f(z_k)$ est égale à $f(c)$.
5. Que peut-on en déduire sur une « vraie » table de multiplication ? Le vérifier sur un exemple.

Exercice 3. *(6 points)* On considère les fonctions $f : x \mapsto \arcsin\left(\dfrac{2\sqrt{x-1}}{x}\right)$ et $g : x \mapsto 2\arctan(\sqrt{x-1})$.

1. Déterminer les domaines de définition, de continuité et de dérivabilité de f et de g.
2. Calculer, là où cela est possible, $f'(x)$ et $g'(x)$. Que peut-on en déduire ?
3. Dresser les tableaux de variations de f et de g, avec leurs limites.
4. Tracer, sur le même graphe, les courbes de f et de g.

Problème. *(12 points)* Pour tout entier $n \geq 2$, on considère l'équation suivante, d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:

$$z^n + z + 1 = 0. \qquad (E_n)$$

I. Dans le cas $n = 2$:
Déterminer les solutions de (E_2). Montrer que chacune est de module strictement inférieur à 2.

II. Dans le cas $n = 3$:

1. Étudier les variations de la fonction $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^3 + x + 1 \end{array} \right.$.
2. En déduire que l'équation (E_3) possède une et une seule solution réelle, que l'on notera r, et montrer que $r \in \left] -1, -\frac{1}{2} \right[$.
3. On note z_1 et z_2 les deux autres solutions complexes de (E_3), sans chercher à les calculer. On rappelle que l'on a alors la factorisation :
$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad z^3 + z + 1 = (z - r)(z - z_1)(z - z_2).$$
Déterminer $z_1 + z_2$ et $z_1 z_2$ en fonction de r.
4. Déduire des questions précédentes une majoration de $|z_1 + z_2|$ et de $|z_1 z_2|$.
5. *(Question difficile)* En déduire que $|z_1| < 1 + \frac{2}{|z_1|}$.
En déduire que toutes les solutions de (E_3) sont de module strictement inférieur à 2.

III. Dans le cas général :
Soit a une solution de E_n.

1. Montrer que $|a|^n \leq |a| + 1$.
2. En étudiant la fonction $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^n - x - 1 \end{array} \right.$, montrer que $|a| < 2$. Conclure.