Feuille d'exercices 5
ÉLÉMENTS DE CORRECTION

Exercice 3.

(a)

$$\begin{cases} 8^x = 10y \\ 2^x = 5y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (3x-1)\ln 2 = \ln 5 + \ln y \\ x\ln 2 = \ln 5 + \ln y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (3x-1) = x \\ \ln y = x\ln 2 - \ln 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = e^{\frac{\ln 2}{2} - \ln 5} = \frac{\sqrt{2}}{5} \end{cases}$$

(b)

$$\begin{cases} x+y = 7 \\ \ln x + \ln y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y = 7 \\ xy = e \end{cases} \underset{X=x \text{ ou } y}{\Leftrightarrow} X^2 - 7X + e = 0 \Leftrightarrow x, y = \frac{7 \pm \sqrt{49-4e}}{2}$$

(c)

$$\begin{cases} xy = a^2 \\ \ln^2 x + \ln^2 y = \frac{5}{2}\ln^2 a \end{cases} \underset{X=\ln x,\ Y=\ln y,\ A=\ln a}{\Leftrightarrow} \begin{cases} X+Y = 2A \\ X^2+Y^2 = \frac{5}{2}A^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X+Y = 2A \\ 2XY = (X+Y)^2 - (X^2+Y^2) = \frac{3}{2}A^2 \end{cases}$$
$$\underset{Z=X \text{ ou } Y}{\Leftrightarrow} 4Z^2 - 8AZ + 3A^2 = 0 \Leftrightarrow Z = \frac{A}{2} \text{ ou } \frac{3A}{2} \Leftrightarrow x, y = a^{\frac{1}{2}}, a^{\frac{3}{2}}$$

Exercice 5.

(a) $x^a e^{-bx} = e^{a\ln x - bx}$.
Or $a\ln x - bx \underset{x\to 0,\ +\infty}{\longrightarrow} -\infty$, donc $x^a e^{-bx} \underset{x\to 0,\ +\infty}{\longrightarrow} 0$.

(b) $(\ln x)^a e^{-bx} = e^{a\ln(\ln x) - bx}$.
Or $a\ln(\ln x) - bx \underset{x\to 1,\ +\infty}{\longrightarrow} -\infty$, donc $(\ln x)^a e^{-bx} \underset{x\to 1,\ +\infty}{\longrightarrow} 0$.

(c) $e^{ax} x^{-b} (\ln x)^{-c} = e^{ax - b\ln x - c\ln(\ln x)}$.
Or $ax - b\ln x - c\ln(\ln x) \underset{x\to 1,\ +\infty}{\longrightarrow} +\infty$, donc $e^{ax} x^{-b} (\ln x)^{-c} \underset{x\to 1,\ +\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Exercice 8.

(a) Soit $x \in [-1,1]$. Comme $\sin \circ \arcsin = \mathrm{Id}_{[-1,1]}$, $\sin(\arcsin x) = x$.

(b) Soit $x \in \mathbb{R}$. On sait que $\arcsin \circ \sin = \mathrm{Id}_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}$. Soit $x' \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ tel que $\sin x' = \sin x$ (on a $x' = x + 2k\pi$ ou $x' = \pi - x + 2k\pi$ pour un certain $k \in \mathbb{Z}$). Alors :

$$\arcsin(\sin x) = \arcsin(\sin x') = x'.$$

(c) Soit $x \in]-1, 1[$. On a : $\tan(\arcsin x) = \dfrac{\sin(\arcsin x)}{\cos(\arcsin x)} = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

(d) Soit $x \in \mathbb{R}$. On a : $\sin = \tan\cos$, donc $\sin(\arctan x) = x\cos(\arctan x)$, où $\cos^2 = \dfrac{1}{1+\tan^2}$, donc $\cos^2(\arctan x) = \dfrac{1}{1+x^2}$; or, comme $\arctan x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, $\cos(\arctan x) \geq 0$, donc $\cos(\arctan x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$; et finalement : $\sin(\arctan x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

Exercice 9.

(c)

$$\begin{aligned}
\sin 2x + \sin x = 0 &\Leftrightarrow 2\sin\frac{3x}{2}\cos\frac{x}{2} = 0\\
&\Leftrightarrow \frac{3x}{2} = 0 \text{ mod } \pi \text{ ou } \frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} \text{ mod } \pi\\
&\Leftrightarrow x = 0 \text{ mod } \frac{2\pi}{3} \text{ ou } \pi \text{ mod } 2\pi.
\end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned}
\sin 2x + \sin\left(\frac{\pi}{3} + 3x\right) = 0 &\Leftrightarrow 2\sin\left(\frac{5}{2}x + \frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{6}\right) = 0\\
&\Leftrightarrow \frac{5}{2}x + \frac{\pi}{6} = 0 \text{ mod } \pi \text{ ou } \frac{x}{2} + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} \text{ mod } \pi\\
&\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{15} \text{ mod } \frac{2\pi}{5} \text{ ou } \frac{2\pi}{3} \text{ mod } 2\pi.
\end{aligned}$$

(e)

$$\begin{aligned}
\cos 3x + \sin x = 0 &\Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right) + \sin x = 0\\
&\Leftrightarrow 2\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\cos\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right) = 0\\
&\Leftrightarrow \frac{\pi}{4} - x = 0 \text{ mod } \pi \text{ ou } \frac{\pi}{4} - 2x = \frac{\pi}{2} \text{ mod } \pi\\
&\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} \text{ mod } \pi \text{ ou } -\frac{\pi}{8} \text{ mod } \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

(f)

$$\begin{aligned}
\cos x - \cos 2x = \sin 3x &\Leftrightarrow 2\sin\left(\frac{3x}{2}\right)\sin\left(\frac{x}{2}\right) = 2\sin\left(\frac{3x}{2}\right)\cos\left(\frac{3x}{2}\right)\\
&\Leftrightarrow \sin\left(\frac{3x}{2}\right) = 0 \text{ ou } \sin\left(\frac{x}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{3x}{2}\right)\\
&\Leftrightarrow \frac{3x}{2} = 0 \text{ mod } \pi \text{ ou } \frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} \pm \frac{3x}{2} \text{mod } 2\pi\\
&\Leftrightarrow x = 0 \text{ mod } \frac{2\pi}{3} \text{ ou } x = \frac{\pi}{4} \text{ mod } \pi \text{ ou } x = -\frac{\pi}{2} \text{ mod } 2\pi.
\end{aligned}$$

(g) $\cos x + \sin x = 2 \Leftrightarrow \cos x = \sin x = 1$, impossible.

(h)

$$\begin{aligned}\sqrt{3}\cos x - \sin x = 1 &\Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x - \frac{1}{2}\sin x = \frac{1}{2}\\ &\Leftrightarrow \cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right) = \cos\frac{\pi}{3}\\ &\Leftrightarrow x+\frac{\pi}{6} = \pm\frac{\pi}{3} \mod 2\pi\\ &\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} \text{ ou } \frac{\pi}{6} \mod 2\pi.\end{aligned}$$

Exercice 13.

(c) L'équation (E) est définie lorsque $2x \in [-1,1]$, donc $D = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$. Soit $x \in D$: $\arcsin x \in \left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right]$ et $\arcsin x\sqrt{3} \in \left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right]$, donc $\arcsin x + \arcsin x\sqrt{3} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Donc :

$$\begin{aligned}(E) &\Leftrightarrow 2x = \sin\left(\arcsin x + \arcsin x\sqrt{3}\right) = x\sqrt{1-3x^2} + x\sqrt{3-3x^2}\\ &\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } 2 = x\sqrt{1-3x^2} + \sqrt{3-3x^2}\\ &\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } \pm\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

(d) Soit $x \in D = [-1,1]$.
Si $x \in [-1,0[$: $\frac{\arcsin x}{2} \in \left[-\frac{\pi}{4}, 0\right[$, or $\arccos x \in [0,\pi]$, donc il n'y a pas de solution.
Si $x \in [0,1]$: $\frac{\arcsin x}{2} \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, donc :

$$\begin{aligned}(E) &\Leftrightarrow x = \cos\left(\frac{\arcsin x}{2}\right) = \sqrt{\frac{1+\cos\arcsin x}{2}} = \sqrt{\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{2}}\\ &\Leftrightarrow x^2 = \frac{1+\sqrt{1-x^2}}{2}\\ &\Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{3}}{2}.\end{aligned}$$

(e) Soit $x \in D = [-1,1]$. $\arctan 2x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, donc :

$$\begin{aligned}(E) &\Leftrightarrow x = \sin(\arctan 2x) = \frac{2x}{\sqrt{1+4x^2}} \quad \text{(cf exercice 8)}\\ &\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } \sqrt{1+4x^2} = 2\\ &\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } \pm\frac{\sqrt{3}}{2}.\end{aligned}$$

(f) Soit $x \in D = \mathbb{R}$.
Si $x < 0$: $\arctan x < 0$, donc $\frac{\pi}{2} - \arctan x > \frac{\pi}{2}$, or $\arctan 3x < \frac{\pi}{2}$, donc il n'y a pas de solution.
Si $x \geq 0$: $\frac{\pi}{2} - \arctan x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, donc :

$$\begin{aligned}(E) &\Leftrightarrow 3x = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \arctan x\right) = \frac{1}{\tan\arctan x} = \frac{1}{x}\\ &\Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{3}\\ &\Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt{3}}.\end{aligned}$$

Exercice 16.

(d)

$$\begin{aligned} \text{sh } 2x = \text{ch } x \quad &\Leftrightarrow \quad 2\text{sh } x\text{ch } x = \text{ch } x \\ &\Leftrightarrow \quad \text{sh } x = \frac{1}{2} \quad \text{car ch } x \neq 0 \\ &\underset{X=e^x}{\Leftrightarrow} \quad X^2 - X - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad e^x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ &\Leftrightarrow \quad x = \ln\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right). \end{aligned}$$

(e)

$$\begin{aligned} 16 \text{ sh } x \text{ ch } x = 15 \quad &\Leftrightarrow \quad \text{sh } 2x = \frac{15}{8} \\ &\Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{2}\text{argsh}\frac{15}{8} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{15}{8} + \sqrt{\left(\frac{15}{8}\right)^2 + 1}\right) = \ln 2. \end{aligned}$$

(f)

$$\begin{aligned} \text{sh } x + \frac{2}{\text{sh } x} = 3 \quad &\Leftrightarrow \quad \text{sh }^2 x - 3\text{sh } x + 2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \text{sh } x = 1 \text{ ou } 2 \\ &\Leftrightarrow \quad x = \ln(1+\sqrt{2}) \text{ ou } \ln(2+\sqrt{5}). \end{aligned}$$

Exercice 17.

$$\begin{aligned} \left\{\begin{array}{rcl} \text{ch } x + \text{ch } y &=& a \\ \text{sh } x + \text{sh } y &=& b \end{array}\right. \quad &\Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{rcl} e^x + e^y &=& a+b \\ e^{-x} + e^{-y} &=& a-b \end{array}\right. \\ &\underset{X=e^x,\ Y=e^y}{\Leftrightarrow} \quad \left\{\begin{array}{rcl} X+Y &=& a+b \\ XY &=& \frac{X+Y}{\frac{1}{X}+\frac{1}{Y}} = \frac{a+b}{a-b} \end{array}\right. \\ &\underset{Z=X \text{ ou } Y}{\Leftrightarrow} \quad (a-b)Z^2 - (a^2-b^2)Z + (a+b) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad X, Y = \frac{a+b}{2}\left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4}{a^2-b^2}}\right) \text{ si } a^2 - b^2 \geq 4 \text{ ou } \leq 0 \\ &\Leftrightarrow \quad x, y = \ln\left(\frac{a+b}{2}\left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4}{a^2-b^2}}\right)\right) \text{ si } a^2 - b^2 \geq 4 \text{ ou } \leq 0. \end{aligned}$$

Exercice 18.

(a)

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \text{ch}(kx) &= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(e^{kx} + e^{-kx}) \\ &= \frac{1}{2}\left((1+e^x)^n + (1+e^{-x})^n\right) \\ &= 2^n \text{ch}\left(\frac{nx}{2}\right)\text{ch }^n\left(\frac{x}{2}\right) \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \operatorname{sh}(kx) &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (e^{kx} - e^{-kx}) \\
&= \frac{1}{2} \left((1+e^{x})^{n} - (1+e^{-x})^{n} \right) \\
&= 2^{n} \operatorname{sh}\left(\frac{nx}{2}\right) \operatorname{ch}^{n}\left(\frac{x}{2}\right)
\end{aligned}$$