Lycée Bellevue – Toulouse **pour le 4 novembre 2024**
PCSI 2 – Informatique

Devoir à la Maison n°1

Le langage utilisé est Python. Pour installer une distribution de Python, consulter le site `prepabellevue.org`, rubrique `PCSI2/Informatique/Installation de Python`.

Les questions précédées du symbole ▷ doivent être faites sur votre ordinateur, mais ne nécessitent pas de rédaction sur votre copie.

Les questions encadrées doivent être rédigées.

Il est important de commenter les lignes de code.

Il est important de tester les fonctions demandées, mais il n'est pas nécessaire de faire figurer les tests sur la copie.

Exercice 1 : Une conjecture d'Euler

Le premier cas du théorème de Fermat énonce qu'une somme de deux cubes n'est pas un cube. En 1769, Euler conjecture la généralisation suivante : pour tout entier $n \geq 3$, la somme de $n-1$ puissances $n^{\text{èmes}}$ n'est pas une puissance $n^{\text{ème}}$.

1. Écrire une fonction `puissance_cinq(N)` qui renvoie **True** si N est une puissance $5^{\text{ème}}$ (c'est-à-dire $\sqrt[5]{N}$ est égale à sa partie entière), **False** sinon.
On admettra que deux flottants x et y sont égaux si $|x-y| < 10^{-10}$.

2. Écrire un script permettant de tester si $a^5+b^5+c^5+d^5$ est une puissance $5^{\text{ème}}$, où $1 \leq a \leq b \leq c \leq d \leq 150$. Conclure.
On pourra afficher les valeurs de a pour suivre la progression du script.

Exercice 2 : Somme et racine

On considère un entier n s'écrivant avec un nombre pair de décimales. On dit que le nombre n *a la propriété SMR* si la somme de ses deux moitiés est égale à sa racine.
Par exemple, 2025 a la propriété SMR car $20+25=45=\sqrt{2025}$. Par contre, 16 n'a pas la propriété SMR car $1+6=7 \neq \sqrt{16}$.

3. Écrire une fonction `smr(n)` qui renvoie **True** si n a la propriété SMR, **False** sinon.

4. Écrire un script permettant d'afficher les nombres n ayant la propriété SMR inférieurs à 10^6, avec un affichage du type `20+25 = √2025`.
On utilisera directement (par copier-coller) le caractère Unicode U+221A.

Exercice 3 : Suite de Conway

Les premiers termes de la *suite de Conway* sont : 1, 11, 21, 1211, 111221..., chaque terme étant obtenu en lisant à haute voix le terme précédent. Par exemple, le terme 1211 se lit « un 1, un 2, deux 1 » donc le terme suivant est 111221.

5. Écrire une fonction `prefixe(s)` qui reçoit une chaîne de caractères `s` et qui renvoie un couple `(k,c)` où c est le premier caractère de s et k est le nombre de répétitions de c en tête de s.
Par exemple, `prefixe('oologue')` renvoie `(2,'o')`.

6. Écrire une fonction `conway_suivant(n)` qui reçoit un entier n et qui renvoie le terme suivant dans la suite de Conway (c'est-à-dire le nombre obtenu en « lisant » n).

▷ Afficher les 10 premiers termes de la suite de Conway.

Il a été démontré que si on note c_n le nombre de chiffres du $n^{\text{ème}}$ terme de cette suite, alors le rapport $\frac{c_{n+1}}{c_n}$ tend vers une constante, appelée *constante de Conway.*

7. Écrire un script permettant de déterminer une valeur approchée de la constante de Conway.

La *suite de Conway binaire* est construite de la même façon que la suite de Conway classique ; mais comme 2 s'écrit 10 en binaire, le terme 11 est suivi de 101, puis de 111011...
On définit de même, pour tout entier $b \geq 2$, la suite de Conway *en base* b (avec $b = 10$ dans le cas classique, $b = 2$ dans le cas binaire...)

8. Écrire une fonction `base(n,b)` qui convertit l'entier n dans la base b.
On pourra constater que, en notant q et r respectivement le quotient et le reste de la divison euclidienne de n par b : le dernier chiffre de l'écriture de n dans la base b est r, et les chiffres précédents sont donnés par la conversion de q dans la base b.

9. Expliquer comment adapter la fonction `conway_suivant` pour qu'elle reçoive n et b et renvoie le terme suivant dans la suite de Conway en base b.

▷ Afficher les 10 premiers termes de la suite de Conway binaire.

10. Déterminer une valeur approchée de la constante de Conway binaire, puis ternaire (c'est-à-dire en base 3).

11. Démontrer (mathématiquement) que, dans la suite de Conway classique, le chiffre 4 ne peut pas apparaître. Conclure.