Devoir à la maison n° 3
CORRIGÉ

Exercice 1.

1. L'équation a pour discriminant $\Delta = (10+4i)^2 - 4\times(13+26i) = 32-24i.$
   Soit $\delta = x+iy$ tel que $\delta^2 = \Delta$, on a :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x^2-y^2 &=& 32\\ 2xy &=& -24\\ x^2+y^2 &=& |\Delta| = 40\end{array}\right. \quad \text{donc} \quad \left\{\begin{array}{rcl} 2x^2 &=& 32+40=72\\ 2y^2 &=& 40-32=8\\ 2xy &=& -24\end{array}\right. \quad \text{donc} \quad \left\{\begin{array}{rcl} x^2 &=& 36\\ y^2 &=& 4\\ xy &=& -12\end{array}\right.,$$

   donc $(x,y) = (6,-2)$ ou $(-6,2)$, donc $\delta = \pm(6-2i)$. L'équation a donc pour solutions :

$$z_{1,2} = \frac{(10+4i)\pm(6-2i)}{2} = 8+i,\ 2+3i.$$

2. (a) L'équation a pour discriminant $\Delta = 4\cos^2\alpha - 4 = -4\sin^2\alpha \leq 0$, donc a pour solutions $z_{1,2} = \dfrac{2\cos\alpha \pm i\sqrt{4\sin^2\alpha}}{2} = \cos\alpha \pm i\sin\alpha = e^{\pm i\alpha}$.

   (b) D'après la question précédente : $\forall z\in\mathbb{C}$,

$$z^{2m} - (2\cos\alpha)z^m + 1 = 0 \Leftrightarrow z^m = e^{\pm i\alpha} \Leftrightarrow z = e^{\pm\frac{i\alpha}{m}}\omega^k,\ k\in[\![0,m-1]\!],$$

   où $\omega = e^{i\frac{2\pi}{m}}$.

Exercice 2.

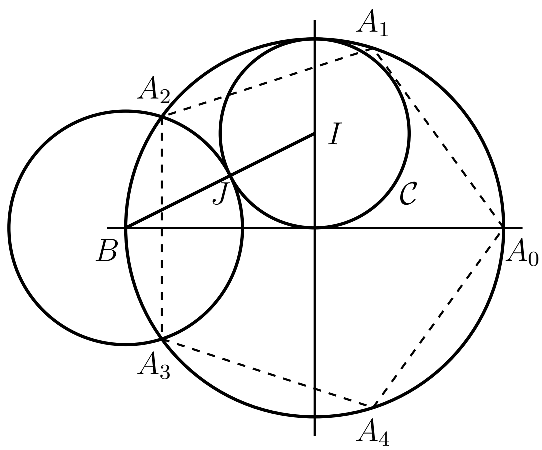
1. Les ω_k sont les racines $5^{\text{èmes}}$ de l'unité, dont on sait qu'elles sont les affixes des sommets du pentagone régulier inscrit dans le cercle unité et passant par le point d'affixe 1. On sait également, par somme géométrique, que $\displaystyle\sum_{k=0}^{4}\omega_k = 0$.

2. La partie réelle de l'égalité précédente s'écrit : $2\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) + 2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + 1 = 0$. De plus, $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = 2\cos^2\left(\frac{2\pi}{5}\right) - 1$, donc $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ est bien solution de l'équation $4x^2+2x-1=0$. Cette équation a pour solutions $-\frac{1}{4}\pm\sqrt{\frac{1}{16}+\frac{1}{4}} = \frac{-1\pm\sqrt{5}}{4}$. Comme $\frac{2\pi}{5}\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, son cosinus est positif, donc $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$.

3. On a :

$$\begin{aligned} BA_2 &= |\omega_2 - (-1)| = |e^{i\frac{4\pi}{5}} + 1| \\ &= \sqrt{\left(1+\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)\right)^2 + \sin^2\left(\frac{4\pi}{5}\right)} \\ &= \sqrt{2+2\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)} \\ &= 2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{5}-1}{2}. \end{aligned}$$

4.



On a $BI = \left|\frac{i}{2} - (-1)\right| = \left|1 + \frac{i}{2}\right| = \sqrt{1+\frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

5. On a $BJ = BI - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = BA_2$.

Pour construire le pentagone $A_0A_1A_2A_3A_4$ à partir du cercle unité, il suffit donc de construire les points I et J. Les sommets A_2 et A_3 sont alors les points d'intersection du cercle unité et du cercle de centre B et de rayon BJ. On reporte ensuite la longueur A_2A_3 sur le cercle unité pour obtenir les autres sommets.

Remarque : Les points A_1 et A_4 peuvent également être obtenus comme points d'intersection du cercle unité avec le cercle de centre B et de rayon BJ', où J' est le second point d'intersection du cercle $\mathcal{C}$ et de la droite (IB).