TD 12 : Intégrales généralisées (1) (Corrigé partiel)

Sauf pour les exercices 7, 8 et 9, les intégrandes en jeu sont de signe constant sur leur intervalle d'intégration. Donc la convergence de l'intégrale généralisée associée équivaut à son absolue convergence ou à l'intégrabilité de l'intégrande.
Commençons par prouver un résultat qui nous sera utile dans les exercices 5 et 6 et que je vous engage à comprendre :

Résultat 1 *Soit g une fonction définie sur l'intervalle $[0,1]$ telle que $g(t) \underset{t\to 0}{\sim} t$ alors $\ln(g(t)) \underset{t\to 0}{\sim} \ln(t)$*

Preuve 1 *on a donc au voisinage de 0 : $g(t) = t + t\epsilon(t)$, où $\epsilon(t) \underset{t\to 0}{\to} 0$. (Ce qui entraîne que $g(t) > 0$ pour t proche de 0^+)*
Il s'ensuit que (dans le même contexte) : $\ln(g(t)) = \ln(t) + \ln(1+\epsilon(t)) = \ln(t) + \underset{t\to 0}{o}(\ln(t))$ puisque dans le second membre de la première égalité $\ln(1+\epsilon(t)) \underset{t\to 0}{\to} 0$ alors que $\ln(t) \underset{t\to 0}{\to} -\infty$.
On a donc bien prouvé que $\boxed{g(t) \underset{t\to 0}{\sim} t \Longrightarrow \ln(g(t)) \underset{t\to 0}{\sim} \ln(t)}$

Exercice 1 : On se donne deux réels α, β et on pose $I_{\alpha,\beta}$ comme étant l'intégrale généralisée : $\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{dt}{(\ln t)^{\beta} t^{\alpha}}$.
a) A l'aide d'une règle bien choisie, prouver successivement que :
i) $I_{\alpha,\beta}$ converge si $\alpha > 1$.
ii) $I_{\alpha,\beta}$ diverge si $\alpha < 1$.
b) Etudier le cas manquant en revenant aux intégrales partielles que l'on exprimera.

Solution sommaire :
a)i)Chercher (avec croissance comparée à l'appui) un réel $\gamma > 1$ tel que $t^{\gamma} f(t) \to 0$ si $t \to \infty$. ($\dfrac{1+\alpha}{2}$ convient mais ce n'est pas le seul.
a)ii) Même démarche mais avec $\gamma \leq 1$ et $t^{\gamma}|f(t)| \to \infty$ si $t \to \infty$. ($\dfrac{1+\alpha}{2}$ convient toujours).
b) Ici $\alpha = 1$ et prenant $x \geq 2$ en posant $F(x) = \displaystyle\int_2^x \frac{dt}{t(\ln t)^{\beta}}$. On a sans peine $F(x) = \ln(\ln(x)) - \ln(\ln(2))$ pour $\beta = 1$ et $F(x) = \dfrac{(\ln(x))^{1-\beta}}{1-\beta} - \dfrac{(\ln(2))^{1-\beta}}{1-\beta}$ sinon. Ainsi $F(x)$ admet une limite finie si $x \to +\infty$ si et seulement si $\beta > 1$.
En résumé $\boxed{\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{dt}{(\ln t)^{\beta} t^{\alpha}} \text{ CV} \iff (\alpha > 1) \text{ ou } (\alpha = 1 \text{ et } \beta > 1)}$ ■

Exercice 2 : Déterminer la nature des intégrales généralisées suivantes :
a) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sin^2(ex)}{x+x^3}dx$. b) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{e^{-x^a}}{\sqrt{x}}dx$, où $a > 0$.c) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{-lnt}dt$.

Solution sommaire :
On note f l'intégrande pour les trois intégrales généralisées.
a) f continue (donc CM) sur $]0,+\infty[$.
En 0 : fausse singularité.
En $+\infty$, $|f(x)| \leq \dfrac{1}{x^3}$; l'intégrabilité notoire sur $[1,+\infty[$ de la fonction majorante assure celle de f.
Donc $\displaystyle\int_0^{\infty} f(x)dx$ CV.
b) f est continue (donc CM) sur $\mathbb{R}_+$.
On observe en outre (croissance comparée) que $x^2 f(x) = \dfrac{x^2}{e^{x^a}} \to 0$ si $x \to +\infty$ (c'est la règle du x^2); ce qui se traduit par $f(x) = o(1/x^2)$ si $x \to +\infty$ et donne, par comparaison l'intégrabilité de f sur $\mathbb{R}_+$.
Ainsi $\displaystyle\int_0^{\infty} f(x)dx$ CV.

c) f est continue (donc CM) sur $]0,1]$ et $\sqrt{t}f(t) \to 0$ si $t \to 0$ (limite usuelle); ce qui permet d'écrire que $f(t) = o(\frac{1}{\sqrt{t}}$ en 0. L'intégrabilité notoire de $t \to \frac{1}{\sqrt{t}}$ sur $]0,1]$ assure celle de f sur le même intervalle. Donc notre IG CV$\blacksquare$

Exercice 3 : (Fonction gamma : A faire absolument)

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^{\infty} e^{-t}t^n dt$.

a) Etablir la convergence de ces intégrales généralisées.

b) A l'aide d'une IPP trouver une relation entre deux termes consécutifs de cette suite de réels.

c) Exprimer I_n à l'aide de n.

Solution sommaire :

a)Intégrande continue sur $\mathbb{R}_+$. Régle t^2 en ∞. b) $I_{n+1} = (n+1)I_n$. c) Récurrence : $I_n = n!\blacksquare$

Exercice 4 :

Nature et calcul éventuel de $\int_0^{\infty} \frac{\arctan x}{x^2+1} dx$.

Solution sommaire :

Intégrande f continue sur $\mathbb{R}_+$.

On utilise le théorème fondamental du calcul intégral généralisé (le crochet généralisé ayant un sens) et on a : $\int_0^{\infty} \frac{\arctan x}{x^2+1} dx$ converge (ce qui peut se voir aussi en observant que en ∞ $f(x) = O(1/x^2)$) et $\int_0^{\infty} \frac{\arctan x}{x^2+1} dx = \left[\frac{(\arctan(x))^2}{2}\right]_0^{+\infty} = \boxed{\frac{\pi^2}{8}}\blacksquare$

Exercice 5 :

Nature de $\int_0^{\infty} \ln(thx)dx$.

Solution sommaire :

Notons f l'intégrande; elle est continue (donc CM) sur $]0,+\infty[$.

En 0 (en utilisant le résultat 1 du début de corrigé avec $g = th$) : $|f(x)| \underset{x\to 0}{\sim} |\ln(x)|$.

Mais ln est intégrable sur $]0,1]$, il en va de même pour f; ceci entraîne la convergence de l'intégrale généralisée $\int_0^1 f(x)dx$.

En $+\infty$ et en passant aux exponentielles : $f(x) = ln(1-e^{-2x}) - ln(1+e^{-2x}) = -2e^{-2x} + o(e^{-2x})$. Donc $f(x) = O(e^{-2x})$.

Comme $x \to e^{-2x}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$, par comparaison f l'est aussi. Ainsi $\int_1^{\infty} f(x)dx$ converge. Des deux convergences précédentes nous déduisons celle de l'intégrale généralisée $\int_0^{\infty} \ln(thx)dx.\blacksquare$

Exercice 6 : Intégrales de Poisson (Centrale)

a)Démontrer que $\int_0^{\pi/2} \ln(\sin t)dt$ et $\int_0^{\pi/2} \ln(\cos t)dt$ convergent.

b)On note I et J leurs valeurs. En calculant $I+J$, déterminer I et J.

Solution sommaire :

a)Notons f l'intégrande de la première IG; f est continue (donc CM) sur $]0,\pi/2]$.

Le résultat 1 du début de document entraîne ($g = \sin$ cette fois) $|f(t)| \underset{t\to 0}{\sim} |\ln(t)|$, ce qui, combiné à l'intégrabilité du ln sur $]0,\pi/2]$, donne celle de f sur ce même intervalle.

$\boxed{\text{l'IG } \int_0^{\pi/2} \ln(\sin t)dt \text{ converge donc}}$.

Le changement de variable affine $t = \frac{\pi}{2} - x$ dans l'intégrale généralisée précédente montre d'une part que $\int_0^{\pi/2} \ln(\cos t)dt$ et qu'elle a même valeur d'autre part$\blacksquare$

b) Par linéarité des valeurs des IG convergentes et trigonométrie vitale, nous avons $I+J = \int_0^{\pi/2} \ln(\frac{\sin(2t)}{2})dt$.

Soit aussi $I+J = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin(2t))dt - \frac{\pi}{2}\ln(2)$; on notera que $\int_0^{\pi/2} \ln(\sin(2t))dt$ est nécessairement convergente et on note K sa valeur.

On effectue dans K le changement de variable affine $t = u/2$, il conduit à une égalité de valeurs d'intégrales généralisées convergentes, à savoir :

$2K = \int_0^{\pi} \ln(\sin(u))du = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin(u))du + \int_{\pi/2}^{\pi} \ln(\sin(u))du$ (Chasles).

On procède alors dans l'intégrale généralisée toute à droite au changement de variable $u = v + \frac{\pi}{2}$, ce qui donne : $2K = I + J$.

Finalement puisque $I + J = K - \frac{\pi}{2}\ln(2)$ et $I = J$, on a $\boxed{I = J = -\frac{\pi}{2}\ln(2)}$ ■

Exercice 7 : $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x-i)^2}$ est-elle absolument convergente? Convergente? Si oui, quelle est sa valeur?

Solution sommaire :

i)On note à nouveau f l'intégrande, celle-ci est continue sur $\mathbb{R}$ mais à valeurs complexes.

Pour tout réel x : $|f(x)| = \frac{1}{x^2+1}$; cette fonction étant paire l'intégrabilité de f sur $\mathbb{R}$ se résume à celle de f sur $\mathbb{R}_+$. Comme $|f(x)| \underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{1}{x^2}$, elle est prouvée par comparaison puisque $x \to \frac{1}{x^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$. Notre IG est bien ACV donc CV■

ii) Déterminons la valeur de $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x-i)^2}$ en utilisant le le théorème fondamental du calcul intégral généralisé (le crochet généralisé ayant un sens) :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x-i)^2} = \left[\frac{(-1}{x-i}\right]_{-\infty}^{+\infty} = 0 - 0 = 0$$ ■

Exercice 8 : intégrale de Dirichlet (CCINP)

a) Montrer que $f : x \in]0, \pi] \to \frac{1}{x} - \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}$ se prolonge en une fonction C^1sur $[0, \pi]$.

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^{\pi} \frac{\sin(\frac{2n+1}{2}t)}{\sin\frac{t}{2}} dt$.

En justifier l'existence et calculant $I_{n+1} - I_n$, déterminer I_n.

c) Soit $g \in C^1([a,b], \mathbb{R}$, établir que : $\int_a^b g(t)\sin(\lambda t)dt \underset{\lambda \to +\infty}{\to} 0$ (lemme de Riemann-Lebesgue) (♡).

d) En déduire la valeur de $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$, aprèss avoir prouvé la convergence de celle-ci.

Corrigé partiellement

a) La fonction est de classe C^1 sur $]0, \pi]$ et $f(x) = \frac{2sin(\frac{x}{2}) - x}{2xsin(\frac{x}{2})}$ pour $x \in]0, \pi]$.

Au voisinage de 0 : $f(x) = \frac{o(x^2)}{x^2 + o(x^2)} \underset{x \to 0}{\to} 0$; ce qui permet de prolonger f par continuité en 0 en posant $f(0) = 0$.

Pour vérifier que ce prolongement est C^1sur $[0, \pi]$, il suffit (th de première année) de montrer que $f'(x)$ admet une limite finie si $x \to 0^+$.

Comme pour $x \in]0, \pi]$, $f'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{\cos(x/2)}{4\sin^2(\frac{x}{2})} = \frac{-4\sin^2(\frac{x}{2}) + x^2\cos(x/2)}{4x^2 sin^2(\frac{x}{2})}$

Pour $x \to 0$: $f'(x) = \frac{-4(x/2 - x^3/48)^2 + x^2 - x^4/8 + o(x^4)}{x^4 + o(x^4)} \underset{x \to 0}{\to} -1/24 \in \mathbb{R}$. Ce qui répond à cette question.

b) Continuité de l'intégrande sur $]0, \pi]$ et fausse singularité en 0, l'intégrale généralisée converge bien.

Trigo ($\sin(p) - \sin(q) = 2\cos(\frac{p+q}{2})\sin(\frac{p-q}{2})$) donc, pour tout n, $I_{n+1} - I_n = \int_0^{\pi} \frac{2\cos((n+1)t)\sin(t/2)}{\sin\frac{t}{2}} dt = 0$ après simplification et calcul faciles.

La suite (I_n) est constante et $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, I_n = \pi}$ ■

c) Réponse détaillée à travailler :

Puisque g est de classe C^1 sur le segment $[a,b]$, il existe un reél positif M tel que : $\forall x \in [a,b], [g'(x)| \leq M$.

Puis par une intégration par parties $\lambda > 0$: $\left|\int_a^b g(t)\sin()dt\right| = \left|\left[-\frac{g(t)}{\lambda}\cos(\lambda t)\right]_a^b + \frac{1}{\lambda}\int_a^b g'(t)\cos(\lambda t)dt\right|$

Puis par inégalités triangulaires :

$$\left|\int_a^b g(t)\sin(\lambda t)dt\right| \leq \frac{1}{\lambda}(|g(b)|\,|\cos\lambda b| + |g(a)|\,|\cos\lambda a| + \int_a^b |g'(t)|\,|\cos(\lambda t)|\,dt) \leq \frac{1}{\lambda}(|g(a)| + [g(b)| + M(b-a)).$$

Le théorème des gendarmes donne alors :

$$\boxed{\int_a^b g(t)\sin(\lambda t)dt \underset{\lambda \to +\infty}{\to} 0.}$$ ■

d) La convergence sera prouvée dans votre cours.

En l'admettant, il s'agit de recoller les morceaux. En utilisant c) il vient $\underline{\int\limits_0^\pi f(t)\sin\frac{2n+1}{2}tdt \underset{n\to+\infty}{\to} 0.}$

En utilisant l'expression de f et en scindant en deux intégrales convergentes le membre de gauche de la limite précédente, on a : $\int\limits_0^\pi \frac{\sin\frac{2n+1}{2}t}{t}dt - \frac{I_n}{2} \underset{n\to+\infty}{\to} 0 \Leftrightarrow \int\limits_0^\pi \frac{\sin\frac{2n+1}{2}t}{t}dt \underset{n\to+\infty}{\to} \frac{\pi}{2}$, ce avec b).

Le changement de variable $t = \frac{2u}{2n+1}, u \in \left[0, \frac{2n+1}{2}\right]$ dans l'intégrale précédente, donne $\boxed{\int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx = \frac{\pi}{2}}$■

Exercice 9 : (ENS)

Pour $x \geq 1$, on pose $f(x) = \frac{(-1)^{E(x)}}{x^2}$.

a) f est-elle continue par morceaux sur son intervalle de définition?

b) L' intégrale généralisée $\int_1^\infty f(x)dx$ converge-t-elle?

c) Si oui, valeur?

Solution sommaire :

a) Oui car ses discontinuités sont les entiers naturels et qu'en ces points il y a limites latérales finies (A vous de les préciser)■

b) Oui car ACV■

c) Posons $I_n = \int_1^n f(x)dx$, la valeur cherchée est la limite de I_n si $n \to \infty$. Chasles et un calcul aisé d'intégrale font que $I_n = \sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1})$. La série alternée de Riemann d'exposant 1 convergeant, on a $\int_1^\infty f(x)dx = \sum_{k=1}^\infty \frac{(-1)^k}{k} + \sum_{k=2}^\infty \frac{(-1)^k}{k}$. On a vu dans le cours que la somme de la première série vaut $-\ln 2$ donc $\int_1^\infty f(x)dx = -2\ln 2 + 1$■

Exercice 10 : (Intégrales de Fresnel)

a) Montrer que les intégrales généralisées $\int_0^\infty \frac{1}{x^4+1}dx$ et $\int_0^\infty \frac{x^2}{x^4+1}dx$ convergent.

On notera I et J leur valeur.

b) Vérifier que $I = \frac{I+J}{2}$ et faire le changement de variable $t = x - \frac{1}{x}$ dans l'intégrale obtenue pour déterminer I et J.

Solution sommaire :

a)La fonction $f : x \to \frac{1}{x^4+1}$ est continue sur R_+ et au voisinage de $+\infty$: $|f(x)| \sim \frac{1}{x^4}$; ce qui montre, par comparaison, l'intégrabilité de f sur R_+ et la convergence de $\int_0^\infty \frac{1}{x^4+1}dx$.

Le changement de variable légitime $x = 1/t$ dans cette IG permet de montrer la convergence de la seconde et de prouver que $\boxed{\mathrm{I = J}}$■

b) Donc $I = \frac{I+J}{2} = \int_0^\infty \frac{1+x^2}{2(x^4+1)}dx$.

Le changement de variable proposé peut aussi s'écire $x = \phi(t) = \frac{t+\sqrt{t^2+4}}{2}$.

On vérifie que ϕ est une bijection C^1, strictement croissante, de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+$; par conséquent :

Puisque $t^2 + 2 = x^2 + x^{-2} = \frac{1+x^4}{x^2}$ et que $\phi'(t) = \frac{dx}{dt} = \frac{x}{\sqrt{t^2+4}}$ mais $t^2 + 4 = (x + 1/x)^2 = \frac{x^2+1}{x^2}$ donc $I = \int_0^\infty \frac{1+x^2}{2(x^4+1)}dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{2(t^2+2))} = \boxed{\frac{\pi}{2\sqrt{2}}}$■