

Entraînement : Réduction (CCINP MP) (Corrigé)

Notations pour cet exercice :

$\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

On désigne, pour n entier naturel, $n \geq 2$:

- $M_n(\mathbb{K})$ le $\mathbb{K}$ -espace vectoriel des matrices carrées de taille n à coefficients dans $\mathbb{K}$.
- $D_n(\mathbb{K})$ le sous-espace vectoriel des matrices diagonales de $M_n(\mathbb{K})$.

Décomposition de Dunford

On admet le théorème suivant que l'on pourra utiliser librement :

Si A est une matrice de $M_n(\mathbb{K})$ telle que son polynôme caractéristique χ_A soit scindé sur $\mathbb{K}$, alors il existe un unique couple (D, N) de matrices de $M_n(\mathbb{K})$ vérifiant les quatre propriétés suivantes :

- (1) $A = D + N$;
- (2) D est diagonalisable dans $M_n(\mathbb{K})$ (pas nécessairement diagonale) ;
- (3) N est nilpotente ;
- (4) $DN = ND$.

De plus, D et N sont des polynômes en A et $\chi_A = \chi_D$.

Le couple (D, N) s'appelle la décomposition de Dunford de A .

Partie I - Quelques exemples

Q1. Donner le couple de la décomposition de Dunford d'une matrice A de $M_n(\mathbb{K})$ lorsque A est diagonalisable, puis lorsque la matrice A de $M_n(\mathbb{K})$ est nilpotente.

Justifier qu'une matrice trigonalisable vérifie l'hypothèse du théorème, admettant ainsi une décomposition de Dunford.

Le couple de matrices $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$ est-il la décomposition de Dunford de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$?

Q2. Donner un exemple d'une matrice de $M_2(\mathbb{R})$ n'admettant pas de décomposition de Dunford dans $M_2(\mathbb{R})$.

Q3. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix}$.

Calculer son polynôme caractéristique χ_A , puis donner le couple (D, N) de la décomposition de Dunford de A (on utilisera le fait que $\chi_A = \chi_D$).

Q4. Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ telle que $A^2(A - I_n) = 0_n$.

Justifier que $X(X - 1)$ est polynôme annulateur de A^2 et montrer que $(A^2, A - A^2)$ est le couple de la décomposition de Dunford de A .

Solution :

i) La matrice nulle étant diagonalisable, nilpotente et commute avec toute matrice donc le couple de la DDD de A est $(A, 0_n)$ si A est diagonalisable et $(0_n, A)$ si A est nilpotente (puisque'il convient trivialement et qu'il est unique) ■

ii) Il suffit de se souvenir que toute matrice trigonalisable (dans $\mathbb{K}$) possède un polynôme caractéristique scindé sur $\mathbb{K}$ ■

iii) Non puisque $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ alors que $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ■

2) Il suffit proposer une matrice de $M_2(\mathbb{R})$ dont le polynôme caractéristique soit $X^2 + 1$ qui est le prototype du polynôme réel non scindé sur $\mathbb{R}$.

La matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ convient en cela.

Mais cette matrice n'a-t-elle pas pour autant une DDD?

C'est à dire ne peut-on pas toutefois l'écrire $A = D + N$, avec D dz, N nilpotente et $DN = ND$?

Supposons que ce soit le cas : par linéarité de la trace (celle d'une nilpotente est nulle) on aurait $tr(A) = tr(D) = 0$ donc, par Cayley-Hamilton D^2 est scalaire. Or $A^2 = D^2 + 2DN$ (car $N^2 = 0_2$ voir cours) ce qui entraîne que $-I^2 - D^2$ est scalaire et non inversible donc que $A^2 = D^2 = -I^2$ puis $DN = 0_2$ donc $N = 0_2$ (car D inversible) soit $A = D$ alors que A n'est pas diagonalisable. c'est absurde■

3) En développant suivant la seconde colonne $\det(\lambda I_3 - A)$, il vient : $\chi_A = (\lambda + 1)^3$ donc on a affaire à un polynôme scindé sur $\mathbb{R}$ et A possède bien une (unique) DDD dont l'unique couple se note (D, N) . Comme $\chi_D = \chi_A$, le spectre de D est constitué d'une seule valeur propre -1. Or D est dz donc semblable à une matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont ses valeurs propres. Ce qui se résume ici à $D \sim -I_3 \iff D = -I_3$. Dès lors $N = A + I_3$ ■

4) On a $A^2(A^2 - I_n) = A^2(A - I_n)(A + I_n) = 0_n(A + I_n) = 0_n$ donc $X(X - 1)$ est polynôme annulateur de A^2 ; celui-ci étant scindé sur $\mathbb{R}$ et à racines simples : A^2 est diagonalisable. De plus $(A - A^2)^2 = A^2(A - I_n)(A - I_n) = 0_n$ ainsi $A - A^2$ est nilpotente et commute avec A^2 . Comme $A = A^2 + (A - A^2)$, le couple $(A^2, A - A^2)$ est celui de la DDD de A ■

Partie II - Un exemple par deux méthodes

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

On note u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice A .

On notera Id l'application identité de $\mathbb{R}^3$.

Q5. La matrice A est-elle diagonalisable dans $M_3(\mathbb{R})$?

Démontrer qu'on a la somme directe : $\mathbb{R}^3 = Ker(u - Id) \oplus Ker(u - 2Id)^2$.

Q6. Déterminer une base (e_1, e_2, e_3) de $\mathbb{R}^3$ telle que :

$Ker(u - Id) = Vect\{e_1\}, Ker(u - 2Id) = Vect\{e_2\}, Ker(u - 2Id)^2 = Vect\{e_2, e_3\}$.

Ecrire la matrice B de u dans la base (e_1, e_2, e_3) de $\mathbb{R}^3$.

Q7. Déterminer le couple de la décomposition de Dunford de la matrice B et en déduire le couple (on calculera ces matrices) de la décomposition de Dunford de la matrice A .

Q8. A l'aide de la division euclidienne de $(X - 2)^2$ par $X - 1$, trouver deux éléments de $\mathbb{R}[X]$ U et V tels que :

$(X - 1)U(X) + (X - 2)^2V(X) = 1$, où $deg(U) < 2$ et $deg(V) < 1$.

Q9. On pose $p = V(u) \circ (u - 2Id)^2$ et $q = U(u) \circ (u - Id)$.

Déterminer $p(x) + q(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^3$.

Démontrer que p est le projecteur sur $Ker(u - Id)$ parallèlement à $Ker(u - 2Id)^2$.

Préciser de même les caractéristiques de q .

Q10. On pose $d = p + 2q$. Ecrire la matrice de d dans la base (e_1, e_2, e_3) (de la question **Q6**).

Déterminer le couple de la décomposition de Dunford de A en exprimant D et N comme polynômes de la matrice A (sous forme développée).

Solution :

5) On détermine les valeurs propres de u en calculant χ_A ; pour cela on ajoute C_2 à C_1 dans $\det(\lambda I_3 - A)$

ce qui permet de mettre $(\lambda - 2)$ en facteur et donne $\chi_A = \lambda - 2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & \lambda & -1 \\ 0 & 1 & \lambda - 2 \end{vmatrix}$.

On ajoute C_1 à C_3 et on développe alors suivant la dernière colonne pour obtenir : $\chi_A = (\lambda - 2)^2(\lambda - 1)$.
 A (donc u) est sûrement trigonalisable puisque son polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{R}$; on voit aisément (écrire la matrice) que le rang de $A - 2I_3$ vaut 2 donc que $\dim(\text{Ker}(A - 2I_3)) = 1 \neq 2 = m(2)$.
 Ainsi A et u ne sont pas diagonalisables.

Par ailleurs $\dim(\text{Ker}(u - Id)) + \dim(\text{Ker}(u - 2Id)^2) \geq 1 + 2 = 3$.

Pour conclure il nous suffit de montrer que ces noyaux sont en somme directe. On prend donc x dans les deux noyaux d'où : $u(x) = x$ et $u^2(x) - 4u(x) + 4x = 0_{\mathbb{R}^3}$ donc $x = 0_{\mathbb{R}^3}$ et la somme est bien directe ■

6) On détermine ces noyaux :

$\text{Ker}(u - Id) = \text{Vect}((0, 1, 1) = e_1)$ et $\text{Ker}(u - 2Id)^2 = \text{Vect}((1, 1, 0) = e_2; (0, 0, 1) = e_3)$ (Pour le second noyau il faut calculer $(A - 2I_3)^2$; on trouve $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.)

La juxtaposition des deux bases mises en évidence ci-dessus détermine (puisque les noyaux sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$) une base de $\mathbb{R}^3$ (e_1, e_2, e_3) que l'on note b .

Dès lors $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. La dernière colonne vient du fait (utiliser la troisième colonne de A) que $u(e_3) = (1, 1, 2) = e_2 + 2e_3$ ■

7) On pose alors $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $N = B - D$, on vérifie que $ND = DN = 2N$ et comme N est nilpotente le couple (D, N) est bien le couple de Dunford de B .

Notons P la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ à la base (e_1, e_2, e_3) , on a donc $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $A = PBP^{-1} = PDP^{-1} + PNP^{-1}$. Posant $\Delta = PDP^{-1}$ et $\Omega = PNP^{-1}$, il vient que la

première de ces matrices est dz (car semblable à une matrice diagonale), la seconde nilpotente (son carré est la matrice nulle) puis que ces matrices commutent puisque $DN = ND$ et qu'enfin leur somme est égale à A . En résumé (Δ, Ω) est le couple de Dunford de A .

La matrice de passage de la base (e_1, e_2, e_3) à la base canonique est $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$; on trouve

alors $\Omega = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ puis $\Delta = A - \Omega = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ ■

8) La division euclidienne en question est : $(X - 2)^2 = (X - 1 - 1)^2 = (X - 1)(X - 3) + 1$.

Donc $\boxed{\text{On pose } U(X) = -X + 3 \text{ et } V(X) = 1}$ ■

9) Compte tenu de ce qui précède $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^3, p(x) + q(x) = x}$.

Pour $x \in \text{Ker}(u - 2Id)^2$, $p(x) = 0_{\mathbb{R}^3}$, ce par définition de p .

Et pour $x \in \text{Ker}(u - Id)$, $p(x) = x$ (cf réponse à Q5).

Comme ces deux noyaux sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$, p est bien le projecteur voulu.

Des calculs similaires montrent que q est le projecteur sur $\text{Ker}(u - 2Id)^2$ et parallèlement à $\text{Ker}(u - Id)$ ■

10) On note Φ et Ψ les matrices respectives de p et q dans b . On a donc, par leurs caractéristiques géométriques précisées en 9), $\Phi = \text{diag}(1, 0, 0)$ et $\Psi = \text{diag}(0, 1, 1)$ donc la matrice de d dans la base b est $\Delta = \text{diag}(1, 2, 2)$.

Il résulte de ceci que $D = V(A)(A - 2I_3)^2 + 2u(A)(A - I_3) = -A^2 + 4A - 2I_3$ est une matrice diagonalisable.

La matrice $N = A - D = A^2 - 3A + 2I^3 = (A - I_3)(A - 2I_3)$ est alors nilpotente puisque $N^2 = (A - I_3)\chi(A) = 0_3$ (en utilisant le théorème de Cayley-Hamilton). Nous avons retrouvé le couple DDD de A ■

Partie III - Une preuve de l'unicité de la décomposition

Q11. Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension n .

Soient u et v deux endomorphismes diagonalisables de E qui commutent. On note $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ les valeurs propres de u et pour tout $1 \leq i \leq p$, $E_{\lambda_i}(u)$ le sous-espace propre de u associé à la valeur propre λ_i .

Démontrer que tout sous-espace propre de u est stable par v .

En déduire¹ qu'il existe une base commune de diagonalisation pour u et v .

Pour tout $1 \leq i \leq p$, on pourra noter v_i l'endomorphisme induit par v sur $E_{\lambda_i}(u)$.

Q12. Soient A et B deux matrices diagonalisables de $M_n(\mathbb{K})$ qui commutent. Démontrer que la matrice $A - B$ est diagonalisable.

Q13. Soient A et B deux matrices nilpotentes de $M_n(\mathbb{K})$ qui commutent, démontrer que la matrice $A - B$ est nilpotente.

Q14. Déterminer les matrices de $M_n(\mathbb{K})$ qui sont à la fois diagonalisables et nilpotentes.

Q15. Dans cette question, on admet, pour toute matrice carrée A de $M_n(\mathbb{K})$ à polynôme caractéristique scindé, l'existence d'un couple (D, N) vérifiant les conditions (1), (2), (3), (4) et tel que D et N soient des polynômes en A .

Etablir l'unicité du couple (D, N) dans la décomposition de Dunford.

Solution :

11) La première partie de la question et du cours.

Toujours par le cours chaque v_i ($1 \leq i \leq p$) est diagonalisable (puisque v l'est et que chaque $E_{\lambda_i}(u)$ est stable par v); notons b_i une base de diagonalisation de v_i et définissons b comme la concaténation de ces p familles.

Pour chaque i , b_i est constituée de vecteurs propres de u (car tous ces éléments sont dans $E_{\lambda_i}(u)$ et de v_i donc de v).

u étant dz, on a $E = \bigoplus_{i=1}^p E_{\lambda_i}(u)$ donc b est une base de E faite de vecteurs propres de u et de v ■

12) Il suffit de traduire matriciellement la question précédente. Notons u et v les endomorphismes canoniquement associés respectivement à A et B et notons P la matrice de passage de la base canonique à une base commune de diagonalisation pour u et v . Ceci signifie qu'il existe deux matrices diagonales D et D' de $M_n(\mathbb{K})$ telles que $A = PDP^{-1}$ et $B = PD'P^{-1}$. Dès lors $A - B = P(D - D')P^{-1}$; ce qui montre bien que $A - B$ est diagonalisable ■

13) Par le cours on sait que $A^n = B^n = 0_n$ donc que si $k \geq n$ alors $A^k = 0_n$ et si $k < n$ alors $2n - k \geq n$ donc $B^{2n-k} = 0_n$.

A et B commutant on peut utiliser le binôme de Newton pour évaluer les puissances de $A - B$. Plus précisément : $(A - B)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} (-1)^k A^k B^{2n-k} = 0_n$ par la remarque précédente. $A - B$ est bien nilpotente ■

14) Il s'agit de la seule matrice nulle. Voir votre cours ■

15) Donnons nous deux couples (D, N) et (D', N') de Dunford de la matrice A . On a donc $D - D' = N' - N$. Comme toutes ces matrices sont des polynômes en A , elles commutent deux à deux. Par ce qui précède (Q12 et Q13), $D - D'$ est donc à la fois dz et nilpotente donc nulle par Q14. Ainsi $D = D'$ et donc $N = N'$ ■

¹On admettra (sera vu mercredi matin) que la restriction à un sev stable d'un endomorphisme diagonalisable l'est encore.