Devoir surveillé n° 2

Durée : 3 heures. Calculatrices non autorisées.
La notation tiendra largement compte de la qualité de la rédaction.
Les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans l'ordre souhaité.
Les exercices qui ne sont pas traités dans l'ordre doivent être rédigés sur des copies séparées.
Le sujet et le brouillon ne sont pas à rendre. Le barème est indicatif.

Exercice 1. *(8 points)* On considère la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x-1} + \sqrt{|x-2|}$.

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Déterminer le domaine de dérivabilité de f.
3. Soit $x < 2$. Lorsque c'est possible, calculer $f'(x)$.
4. Soit $x \in]1,2[$. Montrer que $f'(x) > 0 \Leftrightarrow \sqrt{x-1} < \sqrt{2-x}$. En déduire le signe de f' sur $]1,2[$.
5. Déterminer les variations de f sur $[2,+\infty[$.
6. Dresser le tableau de variations de f.
7. Tracer la courbe de f.

Exercice 2. *(6 points)* Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, on note $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{k} j^2$.

On note de plus $A_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k$, $B_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2$ et $C_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3$.

1. Montrer par récurrence que : $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \displaystyle\sum_{j=1}^{k} j^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$.
2. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n = \dfrac{1}{3}C_n + \dfrac{1}{2}B_n + \dfrac{1}{6}A_n$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Intervertir les sommes dans S_n. En déduire que $S_n = (n+1)B_n - C_n$.
4. Déduire des questions précédentes la formule : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ C_n = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$.
5. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2)$.
   Indication : On pourra utiliser le changement de variables $l = k+1$.

Exercice 3. *(6 points)*

On veut montrer que la fonction f ci-après n'est pas périodique :

$$f : \left\{ \begin{array}{lcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \cos(x) + \cos(\sqrt{2}x) \end{array} \right. .$$

1. Montrer que les fonctions $x \mapsto \cos(x)$ et $x \mapsto \cos(\sqrt{2}x)$ sont périodiques, et donner leurs périodes respectives.
2. Justifier que f est dérivable, et que sa dérivée f' l'est aussi. Calculer la dérivée seconde f''.
3. On raisonne par l'absurde : on suppose, dans toute la suite de l'exercice, qu'il existe un réel strictement positif T tel que f est T-périodique.
   Montrer que, si une fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fois dérivable est T-périodique, alors g' et g'' sont également T-périodiques.
4. En déduire les valeurs exactes de $f(T)$ et $f''(T)$.
5. En déduire que $\cos(T) = \cos(\sqrt{2}T) = 1$.
6. Expliquer pourquoi il existerait alors $\dfrac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ tel que $\sqrt{2} = \dfrac{p}{q}$. Conclure.

Problème. *(15 points)*

I. Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{x^3 - x^2 - x + 1}{x}$.

1. Déterminer le domaine de définition de f. La fonction f est-elle dérivable ?
2. Calculer la dérivée de f. Déterminer l'équation cartésienne de la tangente en 1 à la courbe de f.
3. Dresser le tableau de variations de f avec ses limites.
4. Donner l'allure de la courbe de f.
5. Montrer que f réalise une bijection de $[1, +\infty[$ dans un intervalle J à déterminer.
   On appelle φ la réciproque de cette bijection.
6. La fonction φ est-elle continue ? dérivable ? Sur le graphe de la question 4., donner l'allure de sa courbe.

II. On considère à nouveau les fonctions f et φ étudiées ci-dessus, et on pose $g = \varphi \circ f$.

1. Justifier que la fonction g est définie sur $D_g =]-\infty, -1] \cup]0, +\infty[$.
2. Pour $x \in [1, +\infty[$, que vaut $g(x)$?
3. Préciser les intervalles où g est continue, et ceux où elle est dérivable.
4. Dresser le tableau de variations de g.
5. Soient $x \in D_g$ et $y = g(x)$.
   i. Montrer que $f(x) = f(y)$. En déduire que $(y - x)(xy^2 + (x^2 - x)y - 1) = 0$.
   ii. Montrer que si $x < 1$, alors $y \neq x$.
   iii. En déduire une expression de $g(x)$ en fonction de x (on distinguera trois cas).
6. Montrer que si $x \in]0, 1[$, alors $\dfrac{g(x) - 1}{x - 1} = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{x^2 - x - 4}{2\left(\sqrt{x^4 - 2x^3 + x^2 + 4x} + 2x\right)}$.
   En déduire que g n'est pas dérivable en 1.
7. Donner l'allure de la courbe de g.