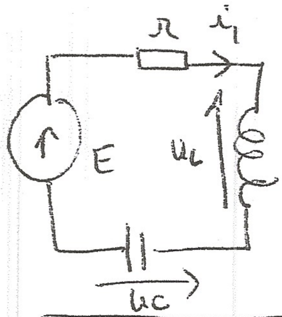
Correction Bougie d'allumage.

1°]



$$\begin{cases} E = r i_1 + L\dfrac{di_1}{dt} + u_C \quad (1) \\ i_1 = C\dfrac{du_C}{dt} \quad (2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{En dérivant (1)} \\ 0 = r\dfrac{di_1}{dt} + L\dfrac{d^2i_1}{dt^2} + \dots \end{cases}$$

d'où $\boxed{\dfrac{d^2i_1}{dt^2} + \dfrac{r}{L}\dfrac{di_1}{dt} + \dfrac{i_1}{LC} = 0}$

On obtient $\begin{cases} 2\lambda\omega_0 = \dfrac{r}{L} \\ \omega_0^2 = \dfrac{1}{LC} \end{cases}$ ou $\dfrac{\omega_0}{Q} = \dfrac{r}{L}$ avec

$$Q = \frac{\omega_0 . L}{r} = \frac{L}{r\sqrt{LC}} \Rightarrow \boxed{Q = \frac{1}{r}\sqrt{\frac{L}{C}}.} \quad \boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}}$$

2°] On admet que le régime est pseudo-périodique → signification :
Pour résoudre l'équation différentielle, on forme l'équation caractéristique en supposant que $e^{\alpha t}$ solution ⇒

$$\alpha^2 + \frac{\omega_0}{Q}\alpha + \omega_0^2 = 0 \quad \rightarrow \quad \Delta = \frac{\omega_0^2}{Q^2} - 4\omega_0^2 < 0 \quad \Rightarrow \quad \omega_0^2\left(\frac{1}{Q^2} - 4\right) < 0$$

$$\frac{1}{Q^2} < 4 \quad \rightarrow \quad Q^2 > \frac{1}{4} \quad \rightarrow \quad \boxed{Q > \frac{1}{2}}.$$

$$\alpha = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} \Rightarrow \begin{cases} i_1(t) = A e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t}\cos(\omega t + \varphi) \quad . (I) \\ \text{ou } i_1(t) = (A_1\cos\omega t + B_1\sin\omega t)\,e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t} \quad (II) \end{cases}$$

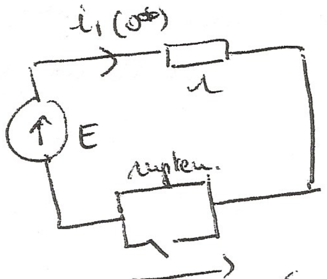
avec A et φ ctes d'intégration, A_1 et B_1 ctes d'intégration) déterminées avec les conditions initiales

Rq : (I) et (II) sont des formes équivalentes (On peut choisir l'une ou l'autre des formes).

3°] a) Détermination des C.I. : il faut déterminer $i_1(0^+)$ et $\frac{di_1}{dt}(0^+)$.

On a sait que u_C est continue ainsi que i_L (courant ds la bobine)

↑ tension aux bornes de ~~la bobine~~ du condensateur à $t=0^-$,



$u_L(0^-) = 0$ car bobine = fil (régime permanent atteint)

$u_C(0^-)$ (condensateur = interrupteur avant car

donc $\begin{cases} i_1(0^-) = \dfrac{E}{r} \\ u_C(0^-) = 0 \end{cases}$ donc à $t=0^+$ $\quad i_1(0^+) = \dfrac{E}{r}$, $\quad u_C(0^+) = 0 = \cancel{C\,dx}$

Loi des mailles à $t=0^+$ $\quad E = \underbrace{r\, i_1(0^+)}_{\frac{E}{r}} + L\dfrac{di_1(0^+)}{dt} + \underbrace{u_C(0^+)}_{0} \Rightarrow \dfrac{di_1(0^+)}{dt}$

donc $\boxed{CI : \; i_1(0^+) = \dfrac{E}{r} \qquad \dfrac{di_1}{dt}(0^+) = 0.}$

b) $i_1(t) = A e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t} \cos(\omega t + \varphi)$

$$\frac{di_1}{dt} = A\left[-\frac{\omega_0}{2Q}\cos(\omega t+\varphi) - \omega \sin(\omega t+\varphi)\right] e^{-\frac{\omega_0 t}{2Q}}.$$

$i_1(t=0^+) = \dfrac{E}{r} \Rightarrow A\cos\varphi = \dfrac{E}{R}$

$\dfrac{di_1}{dt}(0^+) = 0 \Rightarrow -\dfrac{\omega_0}{2Q}\cos\varphi - \omega\sin\varphi = 0 \Rightarrow tg\,\varphi = \dfrac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = -\dfrac{\omega_0}{2Q\omega} \Rightarrow$

$$tg\,\varphi = -\frac{\omega_0}{2Q\omega_0\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}} = -\frac{1}{2Q\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}} = \boxed{-\frac{1}{\sqrt{4Q^2-1}} = tg\,\varphi.}$$

$= \dfrac{\omega}{\omega_0}$

$$\frac{1}{\cos^2\varphi} = 1 + tg^2\varphi = 1 + \frac{1}{4Q^2-1} = \frac{4Q^2}{4Q^2-1} \rightarrow \cos\varphi = \frac{\sqrt{4Q^2-1}}{2Q} \Rightarrow \boxed{\cos\varphi = \sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}.}$$

et $A = \dfrac{E}{R\cos\varphi} = \dfrac{E}{R\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}}$ $\quad$ donc $\boxed{i_1(t) = \dfrac{E}{R\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}} e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t}\cos(\omega t+\varphi)}$

Rq On retrouve bien $i_1(0^+) = \dfrac{E}{R\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}}\cos\varphi = \dfrac{E}{R}$ car $\cos\varphi = \sqrt{1-\dfrac{1}{4Q^2}}$

Forme II

$$i_1(t) = \left(A_1 \cos\omega t + B_1 \sin\omega t\right) e^{-\frac{\omega_0}{2\varphi} t}$$

$$\frac{di_1}{dt} = \left(-A_1\omega \sin\omega t + \omega B_1 \cos\omega t\right) e^{-\frac{\omega_0}{2\varphi} t} + \left(A_1 \cos\omega t + B_1 \sin\omega t\right) \cdot \left(-\frac{\omega_0}{2\varphi}\right) e$$

à $t = 0^+$ $\quad i_1(0^+) = A_1 = \frac{E}{\Omega}$

$$\frac{di_1}{dt}(0^+) = \omega B_1 - \frac{\omega_0}{2\varphi} A_1 = 0 \rightarrow B_1 = \frac{\omega_0}{2\varphi\omega} A_1 = \frac{\omega_0}{2\varphi\omega_0\sqrt{1-\frac{1}{4\varphi^2}}} \cdot \frac{E}{\Omega}$$

$$\boxed{B_1 = \frac{E}{\Omega\sqrt{4\varphi^2-1}}}$$

$$\boxed{i_1(t) = \frac{E}{\Omega} \exp^{-\frac{\omega_0}{2\varphi} t} \left[\cos\omega t + \frac{1}{\sqrt{4\varphi^2-1}} \sin\omega t\right]}$$

$$u_2(t) = \Omega \frac{di_1}{dt} = \Omega \cdot \frac{E}{\Omega} e^{-\frac{\omega_0}{2\varphi} t} \left(\left[-\frac{\omega_0}{2\varphi} \cos\omega t - \frac{\frac{\omega_0}{2\varphi}}{\sqrt{4\varphi^2-1}} \sin\omega t\right] + \left(-\omega \sin\omega t + \frac{\omega}{\sqrt{4\varphi^2-1}} \cos\omega t\right)\right)$$

$$u_2(t) = \Omega \frac{E}{\Omega} \exp^{-\frac{\omega_0}{2\varphi} t} \left[\underbrace{\left(-\frac{\omega_0}{2\varphi} + \frac{\omega}{\sqrt{4\varphi^2-1}}\right)}_{\alpha} \cos\omega t - \underbrace{\left(\frac{\omega_0/2\varphi}{\sqrt{4\varphi^2-1}} + \omega\right)}_{\beta} \sin\omega t\right]$$

avec
$$\begin{cases} \alpha = -\frac{\omega_0}{2\varphi} + \frac{\omega_0 \cancel{\sqrt{1-\frac{1}{4\varphi^2}}}}{2\varphi \cancel{\sqrt{1-\frac{1}{4\varphi^2}}}} = 0 \\[2ex] \beta = \frac{\omega_0/2\varphi}{2\varphi\sqrt{1-\frac{1}{4\varphi^2}}} + \omega_0\sqrt{1-\frac{1}{4\varphi^2}} = \omega_0 \left[\frac{1}{4\varphi^2\sqrt{1-\frac{1}{4\varphi^2}}} + \sqrt{1-\frac{1}{4\varphi^2}}\right] = \end{cases}$$

$$= \omega_0 \left[\frac{1 + 4\varphi^2\left(1-\frac{1}{4\varphi^2}\right)}{4\varphi^2\sqrt{1-\frac{1}{4\varphi^2}}}\right] = \frac{\omega_0 \cancel{4\varphi^2}}{\cancel{4\varphi^2}\sqrt{1-\frac{1}{4\varphi^2}}} = \frac{\omega_0}{\sqrt{1-\frac{1}{4\varphi^2}}}$$

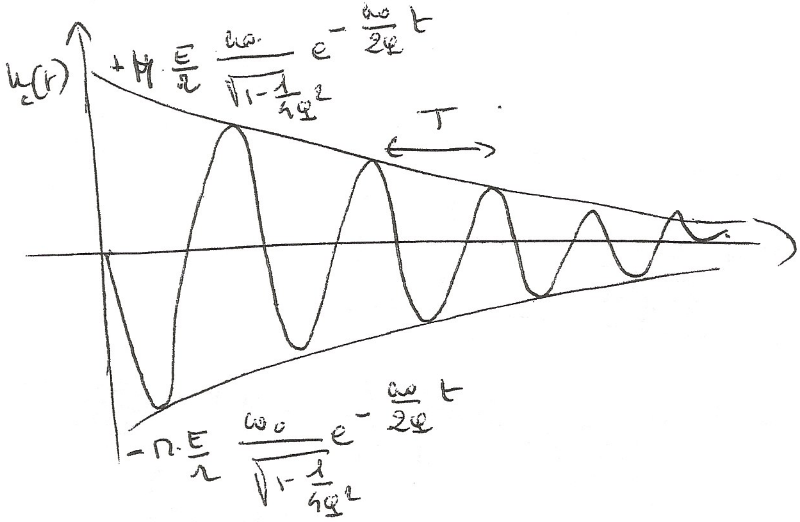
d'où finalement
$$\boxed{u_2(t) = \Omega \cdot \frac{E}{\Omega} \cdot \frac{\omega_0}{\sqrt{1-\frac{1}{4\varphi^2}}} e^{-\frac{\omega_0}{2\varphi} t} \sin \omega_0\sqrt{1-\frac{1}{4\varphi^2}}\, t}$$

$u_2(t)$ est compris entre les 2 courbes enveloppes.

$$\pm \, n \cdot \frac{E}{\Omega} \frac{\omega_0}{\sqrt{1-\frac{1}{4\varphi^2}}} e^{-\frac{\omega_0}{2\varphi} T}$$

Sa pseudo periode $T = \frac{2\pi}{\omega_0\sqrt{1-\frac{1}{4\varphi^2}}}$ et $\frac{du_2}{dt}(t=0^+) = -n \cdot \frac{E}{\Omega} \frac{\omega_0^2}{1-\frac{1}{4\varphi^2}} < 0$

donc la courbe decroit à $t=0^+$.



$$\delta = \ln \frac{u(t)}{u(t+T)} = \frac{\omega_0 T}{2\varphi} = \frac{\cancel{\omega_0} \cdot 2\pi}{2\varphi \cancel{\omega_0} \sqrt{1-\frac{1}{4\varphi^2}}} = \boxed{\frac{2\pi}{\sqrt{4\varphi^2-1}} = \delta}$$

$$\frac{4\pi^2}{4\varphi^2-1} = \delta \rightarrow 4\varphi^2 = \frac{4\pi^2}{\delta^2}+1 \Rightarrow \boxed{\varphi = \frac{\sqrt{1+4\pi^2/\delta^2}}{2}}$$

AN $\delta = 0{,}34$ $\varphi = \frac{\sqrt{1+4\pi^2/0{,}34^2}}{2} = 9{,}2.$

et $\varphi = \frac{1}{\Omega}\sqrt{\frac{L}{C}} \Rightarrow \varphi^2 = \frac{1}{\Omega^2} \cdot \frac{L}{C} \rightarrow \boxed{C = \frac{L}{\varphi^2 \cdot \Omega^2} = 4{,}9\,\mu F.}$