Devoir à la maison n° 2

Exercice 1. Pour m dans $\mathbb{R}$, on considère l'équation d'inconnue réelle x :

$$(E_m): \quad \sqrt{x^2+mx+4} < x+1.$$

1. Déterminer, selon les valeurs de m, le domaine de définition de (E_m).
2. Résoudre (E_m) dans les cas $m=4$ et $m=-4$.
3. Traiter le cas $m=5$.

Exercice 2. On veut déterminer l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1 (dérivables et de dérivée continue) sur $\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f \circ f(x) = ax+b,$$

où $b \in \mathbb{R}$ et $a \in]-1,1[$, $a \neq 0$. On raisonne par analyse-synthèse :

1. En utilisant le fait que $f \circ (f \circ f) = (f \circ f) \circ f$, montrer que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(ax+b) = af(x)+b$.
2. En dérivant l'égalité obtenue, montrer que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = f'(ax+b)$.
3. En déduire que : $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ f'(x) = f'\left(\left(\sum_{k=0}^{n-1} ba^k\right) + a^n x\right)$.
4. Calculer la somme ci-dessus. Montrer que f' est constante sur $\mathbb{R}$.
5. En déduire que f est affine sur $\mathbb{R}$.
6. Réciproquement, déterminer les fonctions affines solutions. Conclure.